

Chapitre 3

Limite de suites

Fiche 2 : Calcul de limites

Comment ? La définition de la limite d'une suite est compliquée. Dans la pratique, si on le peut on utilisera les limites (admisses) des suites dites usuelles. Les limites des suites définies à l'aide de leur formule explicite s'y déduisent par opérations élémentaires (somme, produit, quotient).

A apprendre : les suites usuelles Soit k un entier naturel non nul,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Exemples : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + 1 = 2 \times 0 + 3 \times 0 + 1 = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} -10n^3 + 5 = -10 \times (+\infty) + 5 = -\infty$

Remarque : On connaît aussi les limites des suites arithmétiques et géométriques (voir C3 F4).

Les opérations :

Somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n =$	$L L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

On reconnaît la règle des signes d'un produit.

Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	L	L	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	$\pm\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n > 0$ se note aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ avec $v_n < 0$ se note aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^-$.

*F.I signifie forme indéterminée, on n'est alors pas sûr du résultat de l'opération sur les limites.

Exemples : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{4-n^2} = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Chapitre 3

Limite de suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2+n) \left(\frac{3}{n} - 2 \right) = -\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (2+n) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} - 2 \right) = -2.$$

Exercices : 55, 56 , 57 p 31