Chapitre 3 # Limite de suites

Fiche 5 : Comparaisons

Pourquoi ? La formule explicite peut parfois être trop complexe ou ne pas exister. Dans ces cas, on va comparer la suite dont on veut trouver la limite avec une suite plus simple dont on sait calculer la limite.

Théorèmes de comparaison :

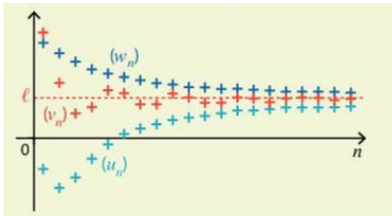
Soient (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes :

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.



Remarque : On s'intéresse à la limite des suites donc les premiers termes n'ont pas d'importance.

Démonstration du premier théorème de comparaison :

$u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang donc il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $u_n \leq v_n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un entier N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $u_n > A$.

Ainsi pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un entier $N = \max(N_1, N_2)$ tel que pour tout $n \geq N$, $v_n > A$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exemples :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$.
Or $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = (-1)^n + n$.
Or $-1 \leq (-1)^n$ donc $-1 + n \leq v_n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + n = +\infty$ par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Pour réviser : Ex 67 à 70 p 31