Limite de fonctions

Fiche 6 : Croissances comparées

Pourquoi ? On sait lever des formes indéterminées pour les fonctions rationnelles (on factorise par la plus grande puissance de x) et pour les fonctions avec exponentielle (on factorise par le plus grand exposant) mais il arrive que deux facteurs ne soient pas de même nature et dans ce cas on ne peut pas simplifier pour lever l'indétermination.

Théorème des croissances comparées :

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Remarque : Ce théorème illustre que la fonction exponentielle croît en $+\infty$ bien plus vite que toute fonction puissance et tend plus vite vers 0 en $-\infty$ que toute fonction puissance vers ∞.

Démonstration : Démontrons tout d'abord que $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$ pour $x \in]0;+\infty[$:

Pour cela nous allons étudier le signe de $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ car $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \Leftrightarrow e^x > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} > 0$.

$f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x$ donc f'' est strictement positive donc f' est strictement croissante et comme $f'(0) = 1$ alors f' est aussi strictement positive donc f est strictement croissante et comme $f(0) = 1$ alors f est strictement positive. Ainsi la première inégalité est démontrée.

Par le théorème de comparaison, comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Montrons le théorème pour tout n, $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$, on reconnait $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ $avec\ X = \frac{x}{n}$.

Comme n est un entier fixé, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

- En posant $X = -x$, on écrit $x^n e^x = \frac{(-1)^n X^n}{e^X}$ on retrouve l'inverse de la formule précédente, on obtient $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Exemples :

1) Soit $f(x) = \frac{x^3+2x-5}{e^x}$. La limite de f en $+\infty$ est de la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination : $\frac{x^3+2x-5}{e^x} = \frac{x^3(1+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3})}{x^3(\frac{e^x}{x^3})} = \frac{1+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{\frac{e^x}{x^3}}$

$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ par le théorème des croissances comparées donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Limite de fonctions

2) Soit $g(x) = e^x(x+10)$. La limite de g en $-\infty$ est de la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Levons l'indétermination : $e^x(x+10) = e^x x + 10e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x x = 0$ par le théorème des croissances comparées et $\lim\limits_{x \to -\infty} 10e^x = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Pour réviser : Ex 94 p 69