Chapitre 6 **Géométrie dans l'espace**

Fiche 6 : Intersection de deux droites

Méthode : Pour déterminer l'intersection de deux droites, on vérifie :

- Si elles sont parallèles : les vecteurs directeurs respectifs sont alors colinéaires.
- Si elles sont sécantes : on résout le système formé par les équations des deux droites, la solution est le point d'intersection.
- Sinon elles sont non coplanaires.

Exemple :

Soient deux droites d' équation paramétrique de (d) : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 8t \\ z = -7 + 9t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ et

(d') : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 4k \\ z = -2 - 3k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.

1) Les vecteurs directeurs respectifs de (d) et (d') sont $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($\frac{1}{2} \neq -\frac{8}{4} \neq \frac{9}{-3}$) donc les droites ne sont pas parallèles.

2) On cherche à déterminer s'il existe une valeur t et une valeur k tel que un point $M(x\,;y\,;z)$ vérifie les deux systèmes en même temps (S) : $\begin{cases} 2 + t = 1 + 2k \\ 3 - 8t = -1 + 4k \\ -7 + 9t = -2 - 3k \end{cases}$.

   On résout alors le système formé par les deux premières équations :

   $$\begin{cases} 2 + t = 1 + 2k \\ 3 - 8t = -1 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 2k \\ 3 - 8(-1 + 2k) = -1 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 2k \\ 3 + 8 + 1 = 16k + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + 2k \\ \frac{12}{20} = k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ k = \frac{3}{5} \end{cases}$$

   Si ces deux valeurs vérifient la troisième équation, les droites sont sécantes.

   $$-7 + 9 \times \frac{1}{5} = -5{,}2 \ et \ -2 - 3 \times \frac{3}{5} = -3{,}8$$

   On ne retrouve pas la même valeur, le système (S) n'a pas de solution.

3) Les droites (d) et (d') sont donc non coplanaires, leur intersection est vide.

Pour réviser : Ex 90, 92 p 296