Chapitre 7 **Fonction Logarithme Népérien**

Fiche 5 : Limites

Propriétés :

Limites aux bornes : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$

Théorème des croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^n\, ln(x) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Nombre dérivé : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln\,(x+1)}{x} = 1$

Démonstration : *Par un élève*

On retient que ce sont les fonctions puissances qui « l'emportent » sur le logarithme.

La fonction logarithme possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Exemple : Lever une forme indéterminée

Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) - ln(x)^2 + 3$ On est dans une forme indéterminée du type ∞-∞.

On factorise par la plus grande puissance de ln :

$$ln(x) - ln(x)^2 + 3 = \ln(x)^2\left(\frac{1}{\ln(x)} - 1 + \frac{3}{\ln(x)^2}\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x)} = 0$

par somme et produit , $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) - ln(x)^2 + 3 = -\infty$

Exemple : Composition

Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(e^{-x} + 1)$

Soit $X = e^{-x} + 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 1$ or $\lim\limits_{X\to 1} ln(X) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(e^{x} + 1) = 0$

Exemple : Croissance comparée avec ln(u)

Calculons $\lim\limits_{x\to -2} (x+2)\, ln(x+2)$

On pose $X = x + 2$ alors $\lim\limits_{x\to -2} X = 0$ or $\lim\limits_{X\to 0} X ln(X) = 0$ par le théorème des croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to -2} (x+2)\, ln(x+2) = 0$

Pour réviser : Ex 59 p 185