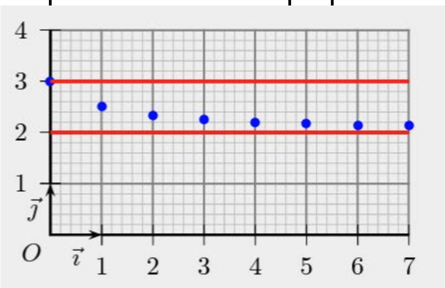
Chapitre 1 **Généralités sur les suites**

Fiche 2 : Majorer ou minorer une suite

Vocabulaire :
Une suite (u_n) est dite majorée s'il existe un nombre M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant$ M.
Le nombre M est un majorant de la suite (u_n).
Une suite (u_n) est dite minorée s'il existe un nombre m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant$ m.
Le nombre m est un minorant de la suite (u_n).
Une suite (u_n) est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple :
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2 + \frac{1}{n+1}$. La suite (v_n) est minorée par 2 et majorée par 3.
En effet, pour tout entier naturel n, $n + 1 \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1$ et ainsi $2 \leq v_n \leq 3$.
La suite (v_n) est bornée.
On peut observer ces propriétés sur la représentation graphique de la suite.



1ère méthode : Montrer une majoration par encadrement de la formule explicite

Montrer que la suite définie par w_n = 2sin(n) est bornée.

Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-2 \leqslant w_n \leqslant 2$.

2ième méthode : Montrer une majoration par récurrence pour une suite définie par récurrence

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.
Montrer que (v_n) est majorée par 3.

On considère la propriété $P(n)$: $v_n \leq 3$.

Initialisation : Pour $n_0 = 0$, $v_0 = 1$. Or $1 \leq 3$, donc P(0) est vraie.

Hérédité : On considère un entier quelconque $k \geq 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $v_k \leq 3$.
Alors $2v_k \leq 6$ donc $2v_k - 3 \leq 3$ donc $v_{k+1} \leq 3$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geq 0, v_n \leq 3$. Donc la suite (v_n) est majorée par 3.

3ième méthode : Montrer qu'une suite n'est pas majorée (ou minorée)

Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = n^2 - 3$ n'est pas bornée.

On montre que la suite (t_n) n'est pas majorée par l'absurde :

Soit M un nombre réel fixé, si M est un majorant de (t_n) alors pour tout entier naturel n, $t_n \leq M \Longrightarrow n^2 \leq M + 3 \Longrightarrow n \leq \sqrt{M+3}$ ce qui est absurde car les entiers naturels ne sont pas majorés donc (t_n) n'est pas majorée.

Chapitre 1 **Généralités sur les suites**

Les exercices du livre : 41 p 30