

Fiche 3 : Variations d'une suite

Pourquoi ? On modélise souvent les phénomènes évolutifs par des suites, par exemple l'évolution d'une population, la taille d'un enfant, le PIB d'un pays, l'évolution d'une pandémie Le but du mathématicien est de trouver une formule mathématique qui s'approche au mieux des premières valeurs observées pour pouvoir prédire le comportement du phénomène étudié dans le futur.

Vocabulaire :

Une suite (u_n) est dite croissante à partir de n_0 , si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est dite décroissante à partir de n_0 , si pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$.

Une suite (u_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante pour tout entier naturel n .

1^{ère} méthode : Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le **signe de la différence entre deux termes consécutifs** $u_{n+1} - u_n$.

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = r$. Si r est positif, alors la suite (u_n) est strictement croissante. Si r est négatif alors la suite (u_n) est strictement décroissante.

2^{ième} méthode : Dans certains cas, il peut être plus simple de comparer le **quotient** $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Exemple : Soit (v_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme tous deux strictement positifs. Alors pour tout entier naturel n , $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$. Si $q > 1$, alors la suite (v_n) est strictement croissante. Si $q < 1$ la suite (v_n) est strictement décroissante.

3^{ième} méthode : Monter une monotonie par récurrence pour une suite définie par récurrence

La suite (w_n) est définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 2w_n - 3$.

Montrer que (w_n) est décroissante.

On considère la propriété $P(n)$: $w_n \geq w_{n+1}$.

Initialisation : Pour $n_0 = 0$, $w_0 = 1$, $w_1 = 2 \times 1 - 3 = -1$. Or $1 \geq -1$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On considère un entier quelconque $k \geq 0$. On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $w_k \geq w_{k+1}$.

Alors $2w_k \geq 2w_{k+1}$ donc $2w_k - 3 \geq 2w_{k+1} - 3$ donc $w_{k+1} \geq w_{k+2}$. Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \geq 0$, $w_n \geq w_{n+1}$. Donc la suite (w_n) est décroissante.

Les exercices du livre : 3 p 17, 42 p 30