Chapitre 1 **Généralités sur les suites**

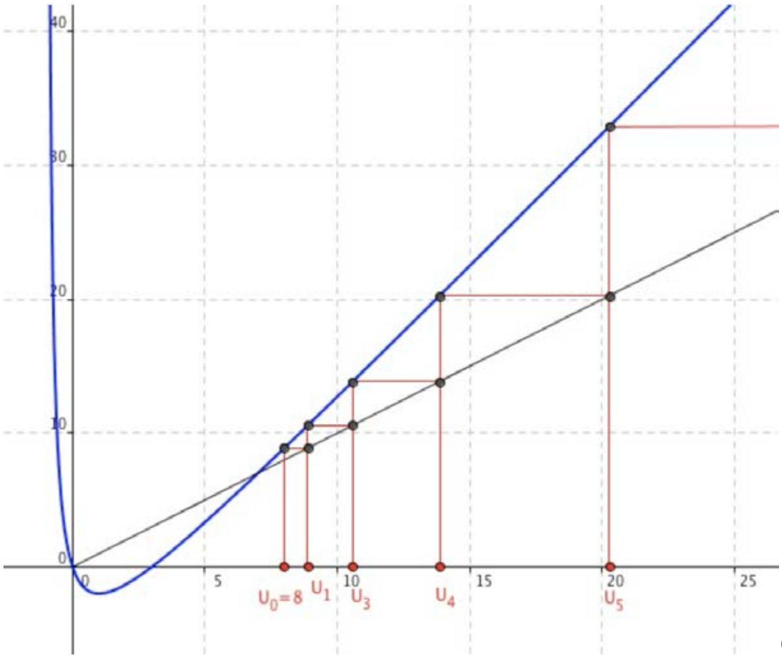
Fiche 5 : Fonction associée à une suite

Pourquoi ? Lorsque la modélisation de la suite amène un calcul plus complexe, on utilise une fonction associée à la suite.

En pratique pour trouver la fonction associée, on remplace u_{n+1} par $f(x)$ et u_n par x.

Exemple : $u_{n+1} = \frac{2u_n^2-6u_n}{u_n+1}$ avec $u_0 = 6$ a pour fonction associée $f(x) = \frac{2x^2-6x}{x+1}$ sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1;+\infty[$.

Graphiquement, on trace la fonction f (en bleu) et la première diagonale $y = x$ en noir. On place sur l'axe des abscisses le premier terme u_0 puis on trace un « escalier » en alternant en verticale vers la fonction f et en horizontale vers la diagonale.



On conjecture que (u_n) est croissante.

Par le calcul : Pour démontrer la monotonie d'une suite, on procède en raisonnant par récurrence.

Soit P la propriété « $u_{n+1} \geq u_n$ ». Montrons, par récurrence, que P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $u_1 = \frac{2\times 8^2-6\times 8}{8+1} \approx 8{,}8 \geq u_0$. Donc P est vraie au rang 0.
Hérédité : Soit k un entier fixé, on suppose de P est vraie au rang k.
Montrons que P est vraie au rang k+1.

$u_{k+1} \geq u_k$

On applique la fonction f aux deux membres de l'inégalité.
Attention ! Il faut étudier les variations de f (dérivée, tableau de signe puis tableau de variations)
Comme f est croissante sur $[8\,;\,+\infty[$, on appliquant f l'inégalité n'est pas modifiée.

$f(u_{k+1}) \geq f(u_k)$

$u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Conclusion : La propriété P est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, par le principe de récurrence, $u_{n+1} \geq u_n$ pour tous les entiers non nuls n.

Remarque : Les variations de la fonction et la monotonie de la suite ne sont pas toujours les mêmes.
Quand la fonction est décroissante, il n'y a pas de monotonie.

Les exercices du livre : Ex 103, 104 p 34