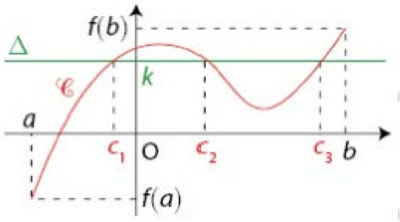
Chapitre 2 # Dérivation

Fiche 6 : TVI

Pourquoi ? Qui a eu cette idée ? Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction. En 1841, il est le premier à démontrer de manière rigoureuse le théorème des valeurs extrêmes (une fonction continue sur un segment possède un maximum et un minimum).

On peut aller plus loin en disant : Une fonction continue sur un segment prend toutes les valeurs entre le maximum et le minimum, c'est une formulation du théorème des valeurs intermédiaires.

Schéma explicatif :



Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b].
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle [a ; b] alors le réel c est unique : c'est le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Exemple : On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x - 3$ sur l'intervalle [0 ; 3]
On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$
→ On détermine $f'(x) = 2x - 1$
→ On étudie le signe de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	3
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

- f est continue sur [0 ; 3] car elle est dérivable sur cet intervalle.
- f est strictement croissante sur [$\frac{1}{2}$; 3]
- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-3,25}$ *et* $f(3) = 3^2 - 3 - 3 = \mathbf{3}$ donc $0 \in [-3,25 ; 3]$

Alors d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans [$\frac{1}{2}$; 3].

De plus l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[0 ; \frac{1}{2}]$ car $0 \notin [-3,25 ; -3]$.

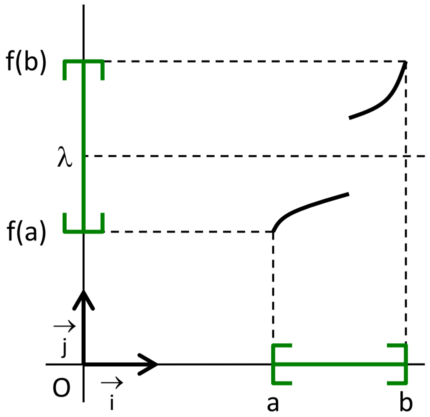
Remarques :

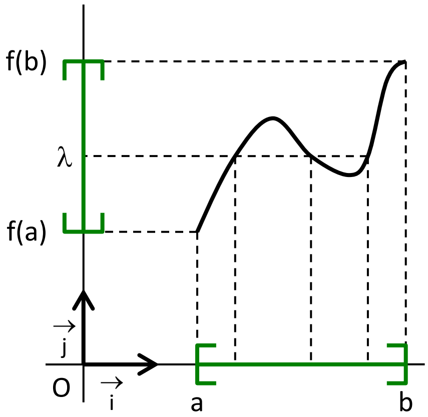
Pour utiliser ce théorème il faut bien vérifier que…

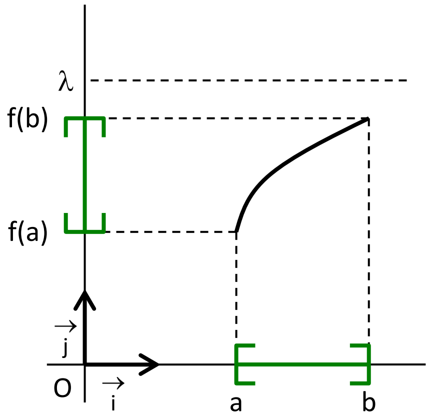
… f est **continue** sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque de ne pas avoir de solution.

… f est **strictement croissante** (décroissante) sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque d'avoir plusieurs solutions.

… **λ ∈ [f(a) ; f(b)]** sinon f(x) = λ n'aura pas de solution.







<u>Calculatrice :</u> Pour trouver une approximation des solutions de l'équation, on utilise la méthode par balayage avec le tableau de valeurs :

<u>Les exercices du livre :</u> Ex 34,35,36 p 123