Chapitre 4 **Probabilités**

Fiche 4 : Propriété des combinaisons

Propriétés : Soit n un entier naturel.

$\binom{n}{0} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à 0 éléments : la partie vide.

$\binom{n}{1} = n$. Dans un ensemble à n éléments, il y a n parties à un élément.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dans un ensemble à n éléments, il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ parties ayant deux éléments.

$\binom{n}{n} = 1$. Dans un ensemble à n éléments, il existe une seule partie à n éléments : l'ensemble lui-même.

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments est le même que le nombre de parties à $n-k$ éléments

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Exemple : $\binom{10}{7} = \binom{10}{3}$. Il y a donc autant de façons de choisir sept objets parmi dix que trois parmi dix.

Théorème : (Relation de Pascal)
Soient n et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n-1$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration :
Soit E un élément à n éléments et a un élément de E.
Parmi toutes les $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E. Il y en a deux sortes :

- Celles qui contiennent l'élément a. Ainsi il reste k-1 éléments à choisir parmi les n-1 restantes soit $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.
- Celle qui ne contiennent pas l'élément a. Ainsi il y a toujours k éléments parmi les k-1 restantes soit $\binom{n-1}{k}$ possibilités.

Méthode : Le triangle de Pascal
On commence par écrire des « 1 » sur la première colonne et sur la diagonale ensuite on remplit le triangle en additionnant la case au-dessus avec celle en diagonale gauche.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...									

Application : Binôme de Newton
Pour tous réels a et b et pour tout entier $n \geq 1, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.
De cette formule, les $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple : $(x+1)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$

Pour réviser : Ex 72 , 75 p 352