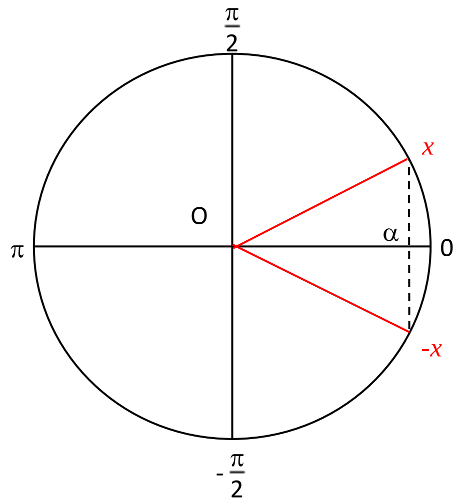
Chapitre 12 **Trigonométrie**

<u>Fiche 5 : Inéquations trigonométriques</u>

a. Inéquation du type « $cos\ x \geq \alpha$ »

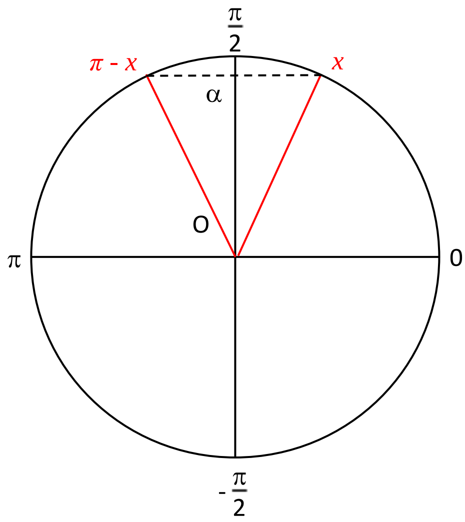


α < -1 ou α > 1	L'inéquation $\boldsymbol{cos\ x \geq\ \alpha}$ n'admet **aucune solution**
α = -1	L'inéquation $\boldsymbol{cos\ x \geq -1}$ admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boldsymbol{x = \pi + 2k\pi, avec\ k} \in \mathbb{Z}$
-1 < α < 1	L'inéquation $\boldsymbol{cos\ x \geq \alpha}$ admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\cup[\boldsymbol{-a + 2k\pi\ ; a + 2k\pi}], \boldsymbol{avec\ k} \in \mathbb{Z}$ où $\boldsymbol{a}$ est UN nombre tel que **cos** $\boldsymbol{a}$ **= α**
α = 1	L'inéquation **cos** $\boldsymbol{x}$ **= 1** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boldsymbol{x = 2k\pi, avec\ k} \in \mathbb{Z}$

<u>Exemple :</u> Résoudre sur ℝ l'inéquation : $cos\ x \leq \frac{1}{2}$

On sait que cos $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'inéquation sont de la forme : $\cup\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$,avec $k \in \mathbb{Z}$

b. Inéquation du type « $sin\ x \leq\ \alpha$ »



α < -1 ou α > 1	L'inéquation $\boldsymbol{sin\ x \leq\ \alpha}$ n'admet **aucune solution**
α = -1	L'inéquation $\boldsymbol{sin\ x \leq\ -1}$ admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, avec\ k} \in \mathbb{Z}$
-1 < α < 1	L'inéquation $\boldsymbol{sin\ x \leq\ \alpha}$ admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\cup[\boldsymbol{-\pi - a + 2k\pi\ ; a + 2k\pi}], \boldsymbol{avec\ k} \in \mathbb{Z}$ où $\boldsymbol{a}$ est UN nombre tel que **sin** $\boldsymbol{a}$ **= α**
α = 1	L'inéquation $\boldsymbol{sin\ x \leq\ 1}$ admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, avec\ k} \in \mathbb{Z}$

<u>Exemple :</u> Résoudre sur ℝ l'inéquation : $sin\ x \leq \frac{1}{2}$

On sait que sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'inéquation sont de la forme : $\cup\left[-\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ; \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$,avec $k \in \mathbb{Z}$

c. Technique : Le tableau de signe

On restreint l'ensemble d'étude à la période la plus petite et on se ramène à une expression factorisée dont on cherche le signe.

Exemple : $f(x) = cos(2x)sin\,(8x)$ Résoudre sur ℝ l'inéquation : $f(x) > 0$

On réduit l'intervalle d'étude à une période la plus petite possible.

Ici, $f(x + \pi) = \cos\big(2(x + \pi)\big)\sin\big(8(x + \pi)\big) = \cos(2x + 2\pi)\sin(8x + 8\pi) = f(x)$

Et comme f est impaire, on peut réduire l'intervalle d'étude sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

On étudie ensuite le signe de chaque facteur séparément :

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq 2x \leq \pi$ alors cos $(2x)$ est positif puis négatif avec un changement de signe en $2x = \frac{\pi}{2}$ soit $x = \frac{\pi}{4}$.

$0 \leq 8x \leq 4\pi$ alors sin $(8x)$ est positif puis négatif puis positif puis négatif avec un changement de signe en $8x = \pi\ et\ 2\pi\ et\ 3\pi$ soit $x = \frac{\pi}{8}\ ; \frac{\pi}{4}\ et\ \frac{3\pi}{8}$.

Ainsi on obtient :

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
cos $(2x)$		+		+		-		-	
sin $(8x)$		+		-		+		-	
$f(x)$		+		-		-		+	

Les solutions sont donc de la forme : $\cup\left] -\frac{3\pi}{8} + k\pi; -\frac{\pi}{8} + k\pi\right[\cup\left]k\pi; \frac{\pi}{8} + k\pi\right[\cup\left]3\pi/8\ + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$,avec $k \in \mathbb{Z}$