Chapitre 1 **Généralités sur les suites**

Fiche 1 : La démonstration par récurrence

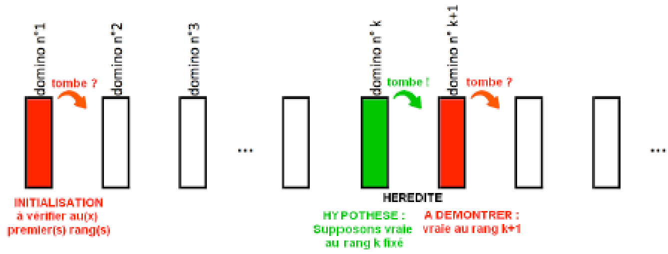
Pourquoi ? Qui a eu cette idée ?

C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

La démonstration par récurrence a pour but de démontrer qu' une propriété est vraie pour tous les nombres entiers.
Pour cela on montre qu'elle est vraie pour le premier rang et que si la propriété est vraie pour un rang donné, elle est aussi vraie pour le suivant.
Par effet « domino », la propriété est vraie pour tous les rangs.

Vocabulaire : Une propriété est dite **héréditaire**, pour k un entier fixé, si la propriété P est vraie pour le rang k alors elle est vraie aussi elle est aussi vraie pour le rang suivant k+1.

Schéma explicatif :



Axiome du raisonnement par récurrence :

Si la propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité)

alors la propriété P est vraie pour tout entier n $\geqslant n_0$.

Démonstration : Ce type de raisonnement est nommé axiome car on ne peut pas le démontrer, c'est une des briques fondatrices des mathématiques sur lesquelles reposent l'ensemble des propriétés qui elles sont démontrables. Un autre axiome est, par exemple, par 2 points passe une seule droite.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 3$ et $u_0 = -2$

Soit P la propriété « $u_n > 0$ ». Montrons, par récurrence, que P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $u_1 = 0{,}5 \times (-2) + 3 = 2 > 0$ Donc P est vraie au rang 1.

Hérédité : Soit k un entier fixé, on suppose de P est vraie au rang k.

Montrons que P est vraie au rang k+1.

$u_k > 0$ donc $0{,}5 \times u_k > 0{,}5 \times 0$ donc $0{,}5u_k + 3 > 0 + 3$ donc $u_{k+1} > 3 > 0$.

Conclusion : La propriété P est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1, par le principe de récurrence, $u_n > 0$ pour tous les entiers non nuls n.

Contre-exemple : L'initialisation est indispensable.

En effet, démontrons par exemple que la propriété "2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation.
Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^kest divisible par 3.
2^{k+1} = 2^k x 2 = 3p x 2, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).
= 6p
Donc 2^{k+1}est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

Chapitre 1 Généralités sur les suites

<u>Les exercices du livre :</u> Ex 1,2,37,38 p 17 et 30