Devoir Maison n°1

Correction

Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) , pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

- 1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n < 6$.

Soit $P(n)$ la propriété « $u_n < 6$ »

Initialisation : $u_0 = -2 < 6$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé tel que $u_k < 6$

$$u_{k+1} < \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6$$

Donc $u_{k+1} < 6$ La propriété est vraie au rang $k+1$

Conclusion : La propriété P est initialisé au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence, P est vraie pour tout entier naturel n .

- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$.

Soit $P(n)$ la propriété « $u_n = 6 - \frac{8}{2^n}$ »

Initialisation : $6 - \frac{8}{2^0} = 6 - 8 = -2$ donc $u_0 = 6 - \frac{8}{2^0}$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier naturel fixé tel que $u_k = 6 - \frac{8}{2^k}$.

$$u_{k+1} = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{8}{2^k} \right) + 3 = 3 - \frac{8}{2^{k+1}} + 3 = 6 - \frac{8}{2^{k+1}}$$

Conclusion : La propriété P est initialisé au rang 0 et héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence, P est vraie pour tout entier naturel n .

- 3) $u_{n+1} - u_n = 6 - \frac{8}{2^{n+1}} - \left(6 - \frac{8}{2^n} \right) = 6 - \frac{8}{2^{n+1}} - 6 + \frac{8}{2^n} = \frac{8}{2^n} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{8}{2^{n+1}} > 0$

Donc (u_n) est strictement croissante.

- 4) Une suite croissante est minorée par son premier terme donc -2 est un minorant de la suite.