Chapitre 5 # Limite de fonctions

Fiche 4 : Limite composée

Pourquoi ? Composer deux fonctions signifie les enchaîner l'une après l'autre.

Par exemple la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{\frac{3}{x}+7}$ peut se calculer en calculant $u : x \longmapsto \frac{3}{x}+7$ suivie de $v : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Ainsi $f(x) = v(u(x))$. On note parfois $f = v \circ u$.

La fonction la plus à l'intérieur est celle dont on calcule la limite en premier.

Schéma explicatif : $x \longmapsto \frac{3}{x}+7 \longmapsto \sqrt{\frac{3}{x}+7}$

Avec les limites : $+\infty \longmapsto \frac{3}{+\infty}+7 = 7 \longmapsto \sqrt{7}$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{3}{x}+7} = \sqrt{7}$

Propriété : (admise)

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{X\to b} g(X) = c \end{cases}$ alors par compositon $\lim\limits_{x\to a} g\big(f(x)\big) = c$.

Exemple : Soit $f(x) = e^{-x+3} = v \circ u$ où $u(x) = -x+3$ et $v(X) = e^X$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x+3 = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Propriétés : (admise) a et b désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

1) Soient f une fonction et (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

2) Soient f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes appartiennent à I.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

Exemple : Soit $u_n = \sqrt{\frac{n^2}{n^2+3}} = f \circ v$ où $v_n = \frac{n^2}{n^2+3}$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{3}{n^2})} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \sqrt{1} = 1$ donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Pour réviser : Ex 95 p 69