

Fiche 5 : Résolution de $y' = ay + f$
avec $a \neq 0$ et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété :

Les solutions de l'équation $y' = ay + f$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax} + g(x)$, où C est un réel et g une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + f$.

Démonstration :

Soit g une solution particulière de $(E): y' = ay + f$ avec $a \neq 0$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = ag(x) + f(x)$

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si y est solution de (E) alors $y'(x) = ay(x) + f(x)$

$$(y - g)'(x) =$$

Réciproquement, si $y - g$ est solution de (E_0) alors $(y - g)' = a(y - g)$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies par $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle donc celles de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{ax} + g$, où C est un réel.

Remarque : Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière g de (E) aux solutions générales de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Exemple : Les solutions de l'équation différentielles $y' = 5y - 2x + 3$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{5x} + g(x)$.

Pour trouver g , comme $f(x) = -2x + 3$, on cherche une solution de la même forme :

Supposons $g(x) = ax + b$: