

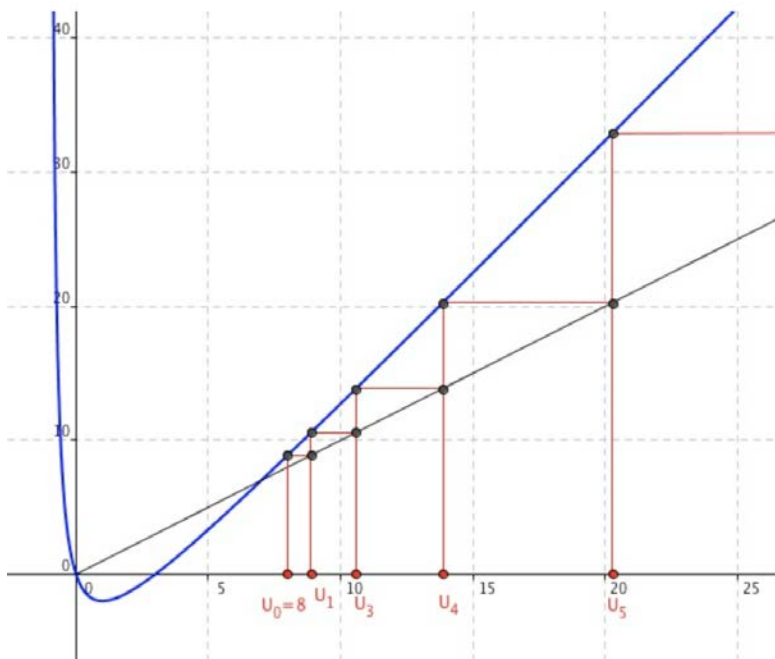
**Fiche 5 : Fonction associée à une suite définie par récurrence**

**Pourquoi ?** Lorsque la modélisation de la suite amène un calcul complexe, on utilise la fonction associée à la suite.

En pratique pour trouver la fonction associée, on remplace  $u_{n+1}$  par  $f(x)$  et  $u_n$  par  $x$ .

Exemple :  $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 6u_n}{u_n + 1}$  avec  $u_0 = 6$  a pour fonction associée  $f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x+1}$  sur  $] -\infty ; -1[ \cup ] -1 ; +\infty[$ .

**Graphiquement**, on trace la fonction  $f$  (en bleu) et la première diagonale  $y = x$  en noir. On place sur l'axe des abscisses le premier terme  $u_0$  puis on trace un « escalier » en alternant en verticale vers la fonction  $f$  et en horizontale vers la diagonale.



On conjecture que  $(u_n)$  est croissante.

**Par le calcul** : Pour démontrer la monotonie d'une suite, on procède en raisonnant par récurrence.

Soit P la propriété «  $u_{n+1} \geq u_n$  ». Montrons, par récurrence, que P est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation :  $u_1 = \frac{2 \times 8^2 - 6 \times 8}{8+1} \approx 8,8 \geq u_0$ . Donc P est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit k un entier fixé, on suppose que P est vraie au rang k.

Montrons que P est vraie au rang k+1.

$$u_{k+1} \geq u_k$$

On applique la fonction  $f$  aux deux membres de l'inégalité.

Attention ! Il faut étudier les variations de  $f$  (dérivée, tableau de signe puis tableau de variations)

Comme  $f$  est croissante sur  $[8 ; +\infty[$ , on appliquant  $f$  l'inégalité n'est pas modifiée.

$$f(u_{k+1}) \geq f(u_k)$$

$$u_{k+2} \geq u_{k+1}$$

Conclusion : La propriété P est initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, par le principe de récurrence,  $u_{n+1} \geq u_n$  pour tous les entiers non nuls n.

**Remarque : Les variations de la fonction et la monotonie de la suite ne sont pas toujours les mêmes.**

Quand la fonction est décroissante, il n'y a pas de monotonie de la suite associée.

**Les exercices du livre :** Ex 103, 104 p 34