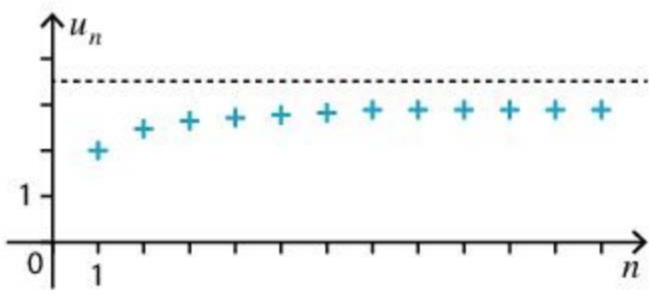
Chapitre 3 # Limite de suites

Fiche 6 : Point fixe

Pourquoi ? Lorsque la suite est générée par une formule de récurrence alors on ne peut plus utiliser les méthodes précédentes. On peut néanmoins conjecturer une limite, si, par exemple, la suite (u_n) est croissante et majorée :



Théorème de la convergence monotone (admis):
Si (u_n) est croissante et majorée par M, alors (u_n) converge vers $l \leq M$.
Si (u_n) est décroissante et minorée par m, alors (u_n) converge vers $l \geq m$.

Remarques :

- Le théorème assure l'existence d'une limite mais ne donne pas cette limite.
- Pour prouver la monotonie et la majoration, on aura recours souvent à une démonstration par récurrence (voir C1)

Théorème du point fixe :
Si (u_n) est une suite convergente vers une limite l alors l est une solution de l'équation $l = f(l)$.

Méthode : Démontrer la convergence d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ et trouver sa limite.

Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{u_n} - 4$ et $u_0 = 1$.

1) On a donc $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ la fonction associée à la suite. De plus f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On démontre par récurrence que cette suite est décroissante et minorée par -8 (conjecture à la calculatrice).
Ainsi par le théorème de la convergence monotone, (u_n) converge vers $l \geq -8$.

2) Prouvons que $l = 4$.

$u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{u_n} - 4$ ainsi par passage à la limite $l = \frac{1}{2}l - 4$ soit $-8 = l$.

Vocabulaire : La solution de l'équation $f(x) = x$ s'appelle **le point fixe,** graphiquement c'est le point d'intersection de la courbe avec la diagonale $y = x$ (représentation en escalier). Attention l'existence d'un point fixe ne garantit pas l'existence d'une limite.

Pour réviser : 85 p 32 ; 110 p 35