Devoir Maison n°6

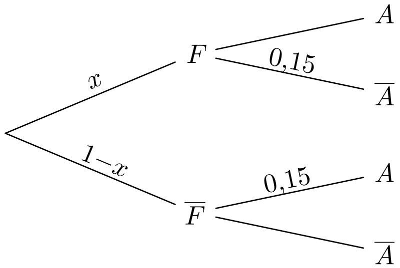
Exercice 1

On étudie une expérience aléatoire suivant les deux évènements A et F.

On donne les informations suivantes :

$\mathcal{P}(A) = 0{,}29$; $\mathcal{P}_F(\overline{A}) = 0{,}15$; $\mathcal{P}_{\overline{F}}(A) = 0{,}15$

On note x la probabilité $\mathcal{P}(F) = x$. On obtient l'arbre de probabilité :



Déterminer la probabilité $\mathcal{P}(F)$.

Exercice 2

Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$. On considère une suite d'évènements (A_n) vérifiant les relations suivantes :

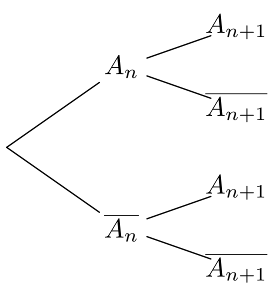
$\mathcal{P}(A_0) = 0{,}4$; $\begin{cases} \mathcal{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6 \\ \mathcal{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On note : $p_n = \mathcal{P}(A_n)$.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. a. Etablir que :
   $p_{n+1} = 0{,}2 \cdot p_n + 0{,}4$

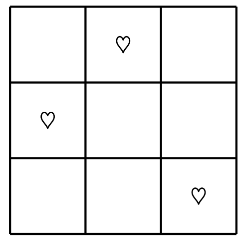
   b. On définit la suite q_n par :
   $q_n = p_n - 0{,}5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   Etablir que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

   c. En déduire l'expression de la suite (p_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{P}(A_n)$.



Exercice 3

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.



Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.