Devoir Maison n°4

Ce devoir est niveau bac : s'il est trop difficile pour vous, vous pouvez vous exercez sur des exercices d'applications sur Labomep.

Pour le 10/11/25

Exercice 1

Les questions sont indépendantes

1. a. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+1}$. *Utiliser le théorème de comparaison.*

b. En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = n - \sqrt{n^2+1}$. *Utiliser à la forme conjuguée.*

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n + 1 - \cos(n)$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $n \leq u_n \leq n+2$.

b. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$?

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2^n - n$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3, u_n \geq 1{,}5^n$. En déduire le comportement de (u_n) en $+\infty$.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x(2-x)$. Montrer que f est strictement croissante dans l'intervalle $[0\,;1]$ et que pour tout $x \in [0\,;1], f(x) \in [0\,;1]$.

2. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0\,;1]$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante (sans utiliser de récurrence).

4. En déduire la convergence de la suite (u_n).