Codage en Python

Strucures de contrôle

```python
# Définition de fonction
def add(a, b):
    c = a + b  # affectation de a + b à c
    return c   # retourne la valeur de c
# Test conditionnel SI ALORS SINON
if a == b:
    ... # bloc de code exécuté si a = b
elif a != c:
    ... # bloc de code exécuté si a différent de c
else:
    ... # bloc de code exécuté par défaut
# Boucle POUR
for i in range(0,10): # i prend successivement les valeurs de 0 à 10 non compris
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de i
for l in "bonjour": # l prend successivement les lettres du mot bonjour
    ... # bloc de code exécuté pour chaque valeur de l
# Boucle TANT QUE
while u < M:
    ... # bloc de code exécuté tant que u < M
```

Variables

```python
n = 1 # n est de type entier
x = 1.0 # x est de type réel
s = "chaîne" # s est de type string
b = True # ou False, b est un booléen
```

```python
l = [] # l est de type liste
l.append(e) # ajoute e à la liste
l.remove(e) # supprime e de la liste
k = l[0] # accès à l'élément de rang 0
```

Entrées/Sorties

```python
print("n = ", n) # affiche la valeur de n
s = input("s = ") # demande la valeur de s => s est de type string
n = int(s) # convertit s en un entier
x = float(s)  # convertit s en un réel
```

Opérations sur les variables

```python
n = n + 1   # ajoute 1 à n
u = 2 * u   # multiplie u par 2
x = 1 / 3   # x = 0.3333333333333333
k = 5 ** 2  # élève 5 au carré et l'affecte à k
q = a // b  # affecte à q le quotient de la division euclidienne de a par b
r = a % b   # affecte à r le reste de la division euclidienne de a par b
```

Les Polynômes

Polynômes du 1er degré

$$ax+b=0 \iff x=\frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

Polynômes du 2nd degré

∗ *Formes possibles :*

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2+bx+c && \text{(forme développée)} \\ &= a(x-\alpha)^2+\beta && \text{(forme canonique)} \\ &= a(x-x_0)^2 \text{ ou } a(x-x_1)(x-x_2) && \text{(forme factorisée si elle existe)} \end{aligned}$$

∗ *Pour dresser le tableau de variations :*

$$\boxed{\alpha=\frac{-b}{2a}} \qquad \boxed{\beta=P(\alpha)}$$

$a>0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P	↘	β	↗

$a<0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
P	↗	β	↘

∗ *Pour déterminer les racines du polynôme, la forme factorisée ou dresser le tableau de signes :*

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- $\Delta<0$ → Pas de racines dans $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

- $\Delta=0$ → $x_0=\frac{-b}{2a}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- $\Delta>0$ → $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

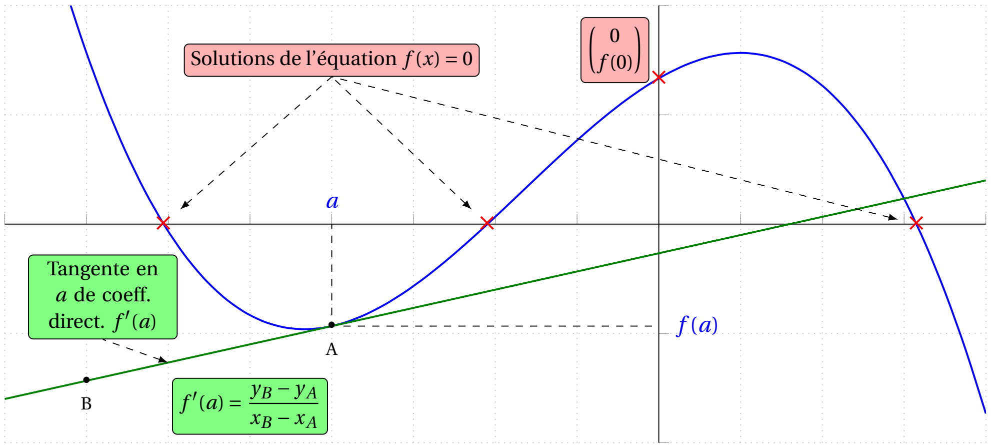
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a	

∗ *Propriétés des racines :*

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Les Fonctions

Lecture graphique



Taux de variation entre a et $a+h$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)}$$

Équation de la tangente en a

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Tableaux des dérivées

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

f	f'
ku	ku'
$u+v$	$u'+v'$
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

Pour étudier les variations d'une fonction f :

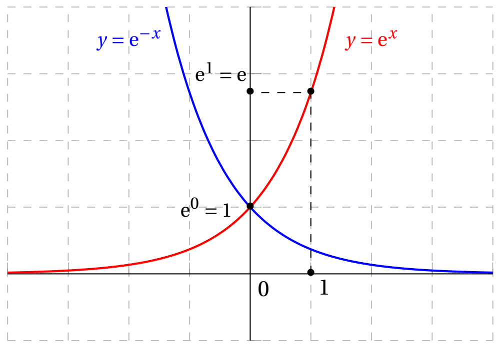
1. je calcule $f'(x)$
2. j'étudie le signe de $f'(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis les variations de f : $\boxed{f'(x) < 0 \Longrightarrow f \searrow}$ ou $\boxed{f'(x) > 0 \Longrightarrow f \nearrow}$

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$:

1. je calcule la différence $d(x) = f(x) - g(x)$
2. j'étudie le signe de $d(x)$ en dressant son tableau de signes
3. je déduis la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$: $\boxed{d(x) < 0 \Longrightarrow \mathscr{C}_f < \mathscr{C}_g}$ ou $\boxed{d(x) > 0 \Longrightarrow \mathscr{C}_f > \mathscr{C}_g}$

Propriétés de la fonction exponentielle

$\boxed{\text{La fonction exponentielle est définie sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout réel } X,\ e^X > 0}$



$$\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^1 &= e \quad (\simeq 2{,}718) \\
e^{a+b} &= e^a \times e^b \\
(e^a)^n &= e^{a\times n} \\
e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} \\
e^{-b} &= \frac{1}{e^b}
\end{aligned}$$

Application concrète

En économie	*Notation*	*Remarques*
Coût total de production	$C(x)$ ou $C_T(x)$	coûts fixes : $C(0)$
Coût marginal	$C_m(x) = C'(x)$	coût de la dernière unité produite
Coût moyen	$C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$	coût moyen unitaire
Recette ou chiffres d'affaires	$R(x) = p \times x$	p est le prix de vente unitaire
Bénéfice	$B(x) = R(x) - C(x)$	⚠ attention au $-$ devant $C(x)$

En cinématique	*Notation*	*Remarques*
Position de l'objet	$f(t)$	position initiale : $f(0)$
Vitesse instantanée de l'objet	$v(t) = f'(t)$	à ne pas confondre avec la vitesse moyenne $v = \dfrac{d}{t}$

Les Suites

➬ *Deux modes de génération*

∗ *Explicite ou fonctionnelle (en fonction de n) :* $u_n = f(n)$

∗ *Récurrent (en fonction du terme précédent) :* $u_{n+1} = f(u_n)$

➬ *Deux types de suite particulière*

Nature	Arithmétique	Géométrique
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = q v_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_p + (n-p)r \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_p \times q^{n-p} \end{aligned}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	premier $\times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \cdots = r$	$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \cdots = q$ $v_{n+1} = \cdots = q v_n$

➬ *Variations de suites*

1. je calcule la différence $u_{n+1} - u_n$
2. j'étudie son signe
3. j'en déduis les variations de la suite u

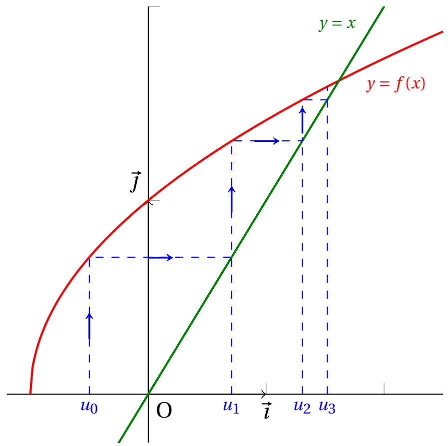
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \implies (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \implies (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \implies (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si $u_n = f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la génère.

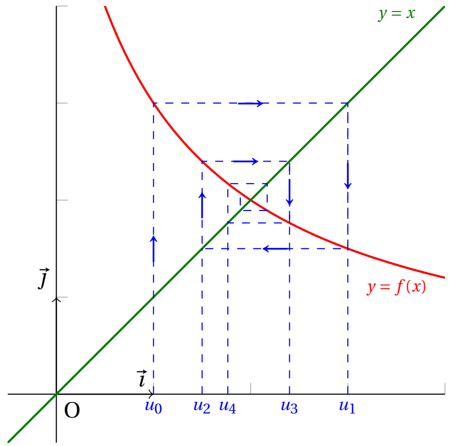
➬ *Calculer avec des pourcentages*

$t\%$ de q	$\dfrac{t}{100} \times q$
Augmenter q de $t\%$	$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times q$
Diminuer q de $t\%$	$\left(1 - \dfrac{t}{100}\right) \times q$
Taux d'évolution entre v_0 et v_1	$\dfrac{v_1 - v_0}{v_0} \times 100$

➬ *Construction graphique des termes de (u_n) dans le cas d'une définition récurrente :* $u_{n+1} = f(u_n)$



Suite croissante



Mode "escargot" (suite alternée)

1. On part de u_0
2. On prend son image par f : $u_1 = f(u_0)$
3. On "rabat" u_1 sur l'axe des abscisses par "projection horizontale" sur $y = x$
4. On répète cette procédure avec u_1, puis u_2 ...

➬ *Algorithmes Python à connaître*

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

```
########## Programme CALCUL #########
# calcule et affiche le terme de
# rang n demandé par l'utilisateur

# demander la valeur de n
n = int(input("n = "))
# initialisation u0 = 1
u = 1
# boucle de calcul
for i in range(n):
    u = 2 * u + 5
print("u = ", u)
```

```
########## Programme SEUIL ##########
# affiche le rang n à partir duquel
# un devient plus grand que M

# initialisation : u0 = 1
n = 0
u = 1
while u < M: # tant que un < M
    # on calcule le terme suivant
    n = n + 1
    u = 2 * u + 5
print("n = ", n)
```

Remarques :

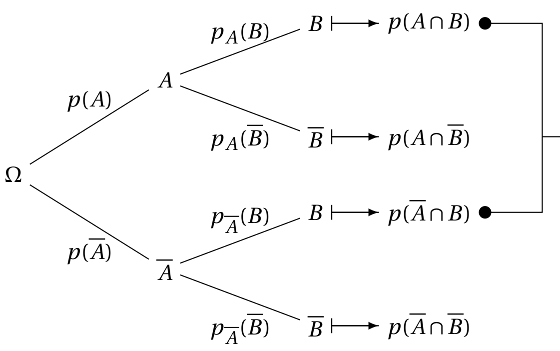
- dans l'algorithme de calcul, on peut afficher **tous les termes** jusqu'à u_n en plaçant `print("u = ", u)` dans la boucle `for`
- dans l'algorithme de seuil, on peut être amené à remplacer la condition `u < M` par `u > M`

LES PROBABILITÉS

➼ *Formules fondamentales*

Probabilité de A	$p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments totals}}$
Probabilité conditionnelle	$p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$
Formule de la réunion	$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$
Si A et B indépendants	$p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$
Complémentarité de A et de $\overline{A}$	$p(A) + p(\overline{A}) = 1$

➼ *Représentation par un arbre pondéré*



Formule des probabilités totales

$$p(B) = p(A\cap B) + p(\overline{A}\cap B)$$
$$= p(A)\times p_A(B) + p(\overline{A})\times p_{\overline{A}}(B)$$

➼ *Représentation par un tableau*

	A	$\overline{A}$	Total
B	$p(A\cap B)$	$p(\overline{A}\cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A\cap \overline{B})$	$p(\overline{A}\cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
Total	$p(A)$	$p(\overline{A})$	**1**

Remarques :

- dans un tableau, on peut remplacer les probabilités par des effectifs
- dans un tableau, on lit "les intersections" et on calcule les probabilités conditionnelles
- dans un arbre, on lit les probabilités conditionnelles et on calcule "les intersections"

➼ *Notion de variables aléatoires*

∗ *Loi de probabilité de X :*

X	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	$p(X = x_0)$	$p(X = x_1)$	$\dots$	$p(X = x_n)$

∗ *Formules à connaître*

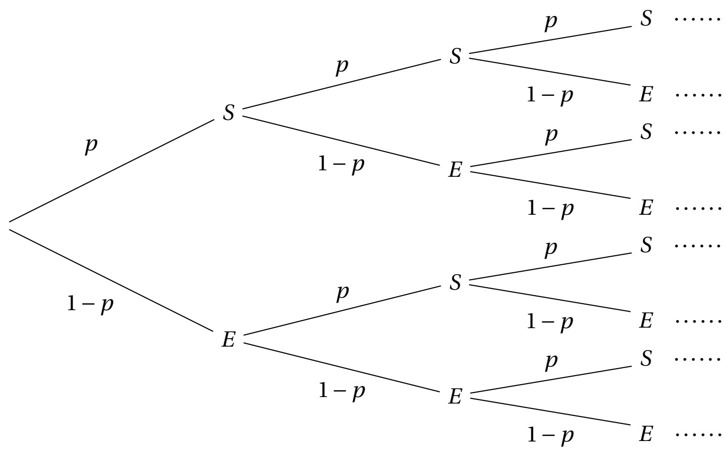
Éspérance (ou moyenne) de X	$E(X) = \sum x_i \times p_i = x_1\times p_1 + x_2\times p_2 + \ldots + x_n\times p_n$
Variance de X	$V(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \times p_i - (E(X))^2$
Écart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques :

- les valeurs x_i peuvent être de nature très différentes (nombre de boules, somme d'argent, ...)
- l'espérance s'interprète en contexte par rapport à la nature des x_i
- l'écart-type permet de calculer la moyenne des écarts à la moyenne est permet d'accorder plus ou moins d'importance à la moyenne

➼ *Répétition d'épreuves à l'identiques*

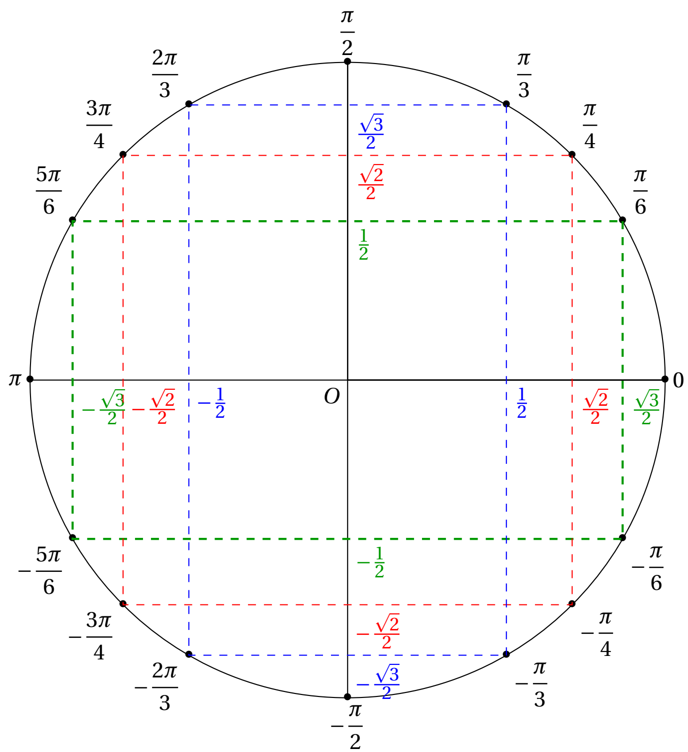
On répète n fois de manière identique et indépendante une épreuve à deux issues : succès ou échec.



Probabilité d'obtenir exactement n succès	$p(S)^n = p^n$
Probabilité d'obtenir au moins un succès	$1 - p(E)^n = 1 - (1-p)^n$

La Trigonométrie

Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

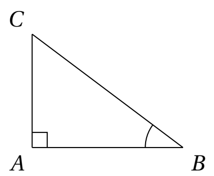


Formules de trigonométrie

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$
$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$$
$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

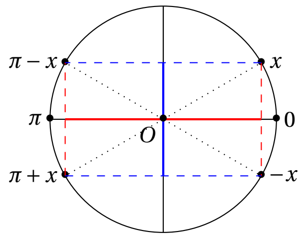
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

Trigonométrie dans le triangle rectangle (SOHCAHTOA ou CAHSOHTOA)



$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$

Repérage sur le cercle trigonométrique



Les cosinus et les sinus sont soit égaux, soit opposés

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

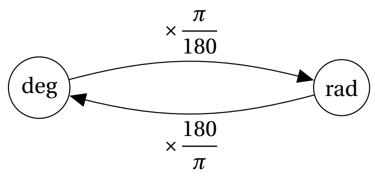
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$

$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

Mesure d'angle et conversion

Mesure principale	$\alpha \in]-\pi\,;\pi]$
Mesure secondaire	$\alpha + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}^*)$



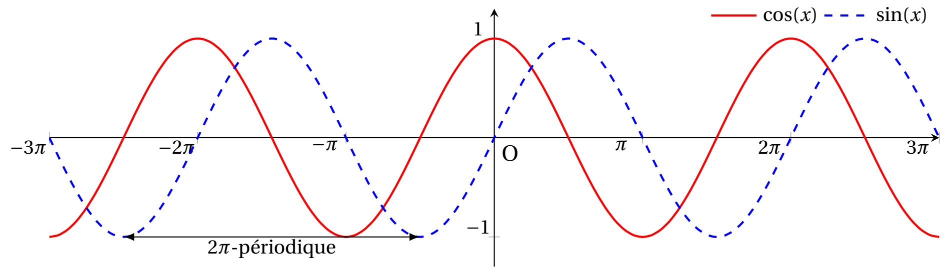
Équations trigonométriques

$$\cos X = \cos a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = -a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\sin X = \sin a \iff \begin{cases} X = a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ X = \pi - a + k \times 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Fonctions sinus et cosinus

∗ *Courbes représentatives :*



∗ *Encadrement :* pour tout réel x, on a $\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$ et $\boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$

∗ *Périodicité :* pour tout réel x, on a $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$ et $\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$

∗ *Parité :* pour tout réel x, on a

$\cos(-x) = \cos(x) \implies$ symétrie par rapport à l'axe des ordonnées

$\sin(-x) = -\sin(x) \implies$ symétrie par rapport à l'origine O

 Mathieu Pons mathete.net

Le Produit Scalaire

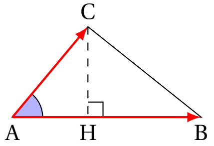
Propiétés importantes

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	$\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}\cdot\vec{v}$
$\vec{u}\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\iff\vec{u}\perp\vec{v}$

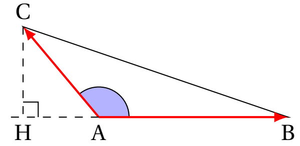
Formules à connaître

∗ *Définition et projection*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}\\&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\\&=\pm AB\times AH\\&=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)\end{aligned}$$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}>0$



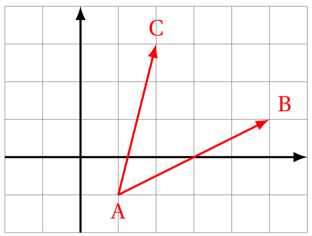
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<0$

∗ *Définition analytique*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\qquad\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy'$$



∗ *Identités remarquables*

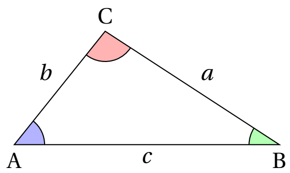
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$$

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^2-\vec{v}^2\iff\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$$

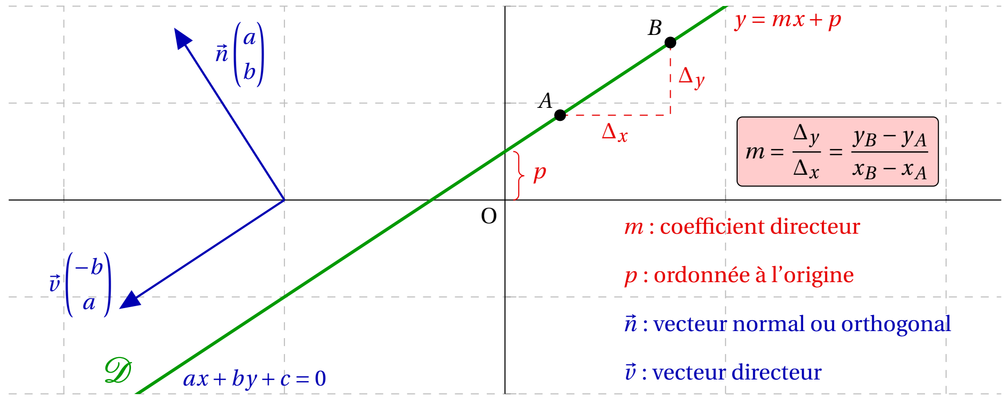
Formules d'Al-Kashi et loi des sinus

$$a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\times\cos\widehat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos\widehat{C}$$
$$\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$



La Géométrie Analytique

Équation réduite et cartésienne de droite

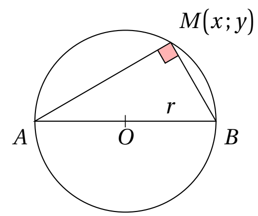


Appartenance d'un point à une doite $\mathscr{D}$

- je détermine un point de $\mathscr{D}$ en fixant x à une valeur quelconque et en isolant y
- je teste si un point appartient ou non à la droite en remplaçant x et y dans l'équation de $\mathscr{D}$

Équation cartésienne de cercle

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}&\iff\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\\&\iff\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\end{pmatrix}=0\\&\iff(x-x_A)(x-x_B)-(y-y_A)(y-y_B)=0\\OM^2=r^2&\iff(x-x_O)^2-(y-y_O)^2=r^2\end{aligned}$$



Colinéarité de vecteurs et alignement de points

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\text{ et }\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\text{ colinéaires}\iff xy'-x'y=0$$

$$\iff\vec{u}=k\vec{v}\quad(k\in\mathbb{R})$$

$$A, B\text{ et }C\text{ alignés}\iff\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{AC}\text{ colinéaires}$$

Déterminer les coordonnées d'un point défini par une relation vectorielle

$$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}\iff\begin{cases}x_E-x_A=\alpha(x_B-x_A)+\beta(x_C-x_A)\\y_E-y_A=\alpha(y_B-y_A)+\beta(y_C-y_A)\end{cases}$$

Intersections de droites

$$\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2\iff\begin{cases}\text{équation de }\mathscr{D}_1\\\text{équation de }\mathscr{D}_2\end{cases}$$

 Mathieu Pons mathete.net