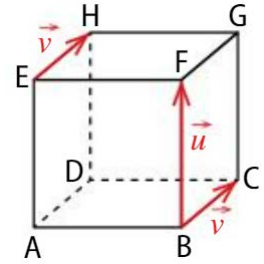


Fiche 1 : Formules

Pourquoi ? Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre (sans unité), s'il est positif l'angle direct formé entre les vecteurs est aigu, s'il est négatif l'angle sera obtus et s'il est nul, l'angle sera droit.

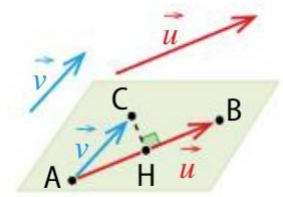
Deux vecteurs ont toujours des représentants coplanaires ainsi les résultats dans le plan vus en première sont vrais dans l'espace.



Formules du produit scalaire (rappels): Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

Formule du cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Formule du projeté : $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ si $H \in [AB]$
 $= -AB \times AH$ sinon
 où H est le projeté orthogonal de C sur (AB)



Formules de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Formule des coordonnées : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

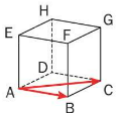
Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque : Dans l'espace, on dit que deux droites sont orthogonales si elles sont non coplanaires et que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites du plan. En pratique, on montre que le vecteur directeur de la droite est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Exemple : Calculons $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas :

a. ABCDEFGH est un cube d'arête 2 cm.

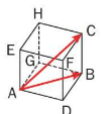


Comme ABC est un triangle rectangle en B, par le théorème de Pythagore,
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $AC = 2\sqrt{2}$.

Ainsi, on utilise la formule du cosinus :

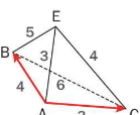
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 2 \times 2\sqrt{2} \times \cos(45^\circ) = 4.$$

b. ADBGEFCH est un cube d'arête 3 cm.



Comme (AC) est perpendiculaire à (CB), le projeté orthogonal de C sur [AB] est B.
 On utilise la formule du projeté orthogonal : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AB = AB^2 = AD^2 + DB^2$
 par le théorème de Pythagore donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 9 + 9 = 18$.

c. ABCE est un tétraèdre. (L'unité est le cm.)



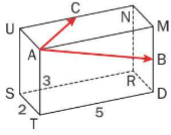
On connaît les trois longueurs du triangle ABC, on utilise donc une formule de polarisation : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 3^2 - 6^2) = -5,5$

Remarque : L'angle $\widehat{BAC}$ étant obtus, il est normal d'obtenir un résultat négatif.

Chapitre 8

Produit Scalaire

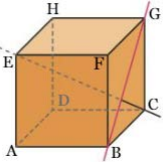
d. AMNUTDRS est un pavé droit, C est le milieu de [UN] et B est le milieu de [MD]. (L'unité est le cm.)



On crée un repère orthonormé $(A ; \frac{\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AM}|}, \frac{\overrightarrow{AU}}{|\overrightarrow{AU}|}, \frac{\overrightarrow{AT}}{|\overrightarrow{AT}|})$ (on a divisé par la norme pour qu'une unité soit égale à 1 cm. Dans ce repère, $A(0,0,0)$, $B(5 ; 0 ; 1,5)$ et $C(2,5 ; 2 ; 0)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2,5 + 0 \times 2 + 1,5 \times 0 = 12,5$.

Exemple : Méthode par décomposition :

Montrer que (BG) est orthogonale à (EC) :



$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{BC}$ par la relation de Chasles. Or si les vecteurs sont orthogonaux, le produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{EC} = BC^2 - EA^2 = 0 \text{ donc (BG) est orthogonale à (EC).}$$

Pour réviser : Ex 21 p 317 et 25 p 318