

Entrainement concours ingénieur post bac : Fonctions

On considère la fonction f définie pour tout réel x , par : $f(x) = -(1+x^2)e^{-x}$.

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note C_f la courbe représentative de f .

III-1- Donner $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Aucune justification n'est attendue.

III-2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

III-3- On en déduit que C_f admet une asymptote Δ au voisinage de $+\infty$. Donner une équation de Δ . Préciser la position de C_f par rapport à Δ . Aucune justification n'est demandée.

III-4- f' désigne la dérivée de f .

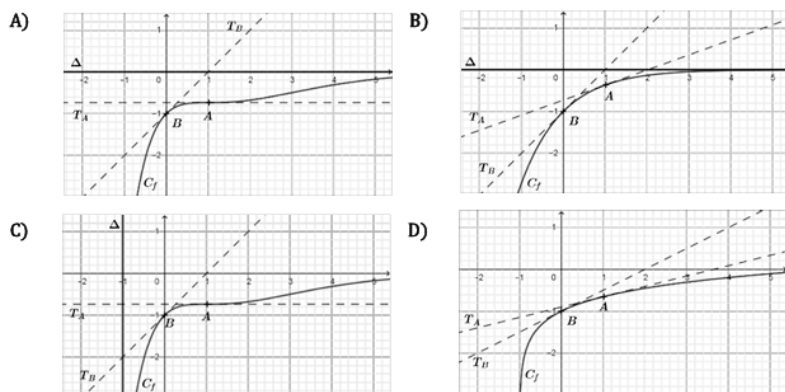
Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x , $f'(x) = (a x + b)^2 e^{-x}$. Détailler le calcul.

III-5- Donner l'ensemble $\mathcal{E}$ des solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Aucune justification n'est demandée.

III-6- Compléter le tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

III-7- Soient A et B les points de C_f d'abscisses respectives $x_A = 1$ et $x_B = 0$. T_A et T_B désignent les tangentes à C_f aux points A et B . Donner, sans justification, des équations de T_A et de T_B .

III-8- QCM Sur une figure, on place les points A et B , on trace la droite Δ , les tangentes T_A et T_B puis la courbe C_f . Parmi celles proposées ci-dessous, laquelle représente la figure obtenue ?



III-9- Justifier que l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-1; 0]$.

III-10- QCM

On considère l'algorithme ci-contre dans lequel :

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

x est un nombre réel.

g est la fonction définie sur $[-1; 0]$ par

$$g(x) = f(x) + 3.$$

On applique cet algorithme à la fonction g .

Quelle valeur contient la variable x après l'exécution de l'algorithme ?

- A) $-0,75$ C) $-0,625$
B) $-0,5$ D) -1

```

a ← -1
b ← 0
Tant que |b - a| > 0,3
  x ← (a+b)/2
  Si g(a)g(x) > 0
    alors a ← x
  sinon b ← x
Fin si
Fin tant que
x ← (a+b)/2
Afficher x
    
```

QCM

Première partie – Fonctions

Dans cette partie, a et b sont des nombres réels. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

I-1- Les réels a et b sont strictement positifs. $\ln(a + b) =$

- A) $\ln(a) \times \ln(b)$. B) $\ln(a) + \ln(b)$. C) $\ln(a) + \ln(1 + \frac{b}{a})$.

I-2- On peut calculer $\ln(x^2 - 1)$ sur :

- A) $]0; +\infty[$. C) $] -\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
B) $] -1; 1[$. D) $]e^{-1}; +\infty[$.

I-3- Si f et g sont deux fonctions définies sur $] -\infty; a[\cup]a; +\infty[$ et telles que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0^+, \quad \text{alors :}$$

- A) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0^+$. C) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = 0^+$.
B) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. D) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x) = +\infty$.

I-4- Si f est une fonction définie sur l'intervalle $]a; +\infty[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, alors :

- A) La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet une asymptote horizontale.
B) La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet une asymptote verticale.
C) La fonction f est décroissante sur $]a; +\infty[$.

I-5- f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 3$ qui vérifie, pour tout nombre réel x , $f'(x) + 2f(x) = 4$.

- On peut en déduire que :

- A) $f'(1) = -2$. B) $f'(1) = 10$. C) $f'(1) = 1$.

- Une équation de la tangente à la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ au point d'abscisse 1 est :

- D) $y = -2x + 3$. E) $y = 10x + 3$. F) $y = x + 2$. G) $y = -2x + 5$.

I-6- f est une fonction dérivable sur l'intervalle $]a; b[$ contenant c . La courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$ admet au point d'abscisse c une tangente horizontale. On peut en déduire que :

- A) $f(c) = 0$.
B) f admet en c un maximum ou un minimum local qui vaut $f(c)$.
C) L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur l'intervalle $]a; b[$.
D) $f'(c) = 0$.

Entrainement concours ingénieur post bac : Fonctions

- I-7- f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$. Quelles sont les propositions vraies ?
- A) Si $f(a) \times f(b) > 0$, alors f s'annule sur l'intervalle $[a; b]$.
 B) Si $c \in]a; b[$, alors $f(c)$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
 C) Si k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a; b]$.

- I-8- f est une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[a; b]$. On note C_f la courbe représentative de f dans le repère $\mathcal{R}$, A le point de C_f d'abscisse a et B le point de C_f d'abscisse b . On suppose que $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[a; b]$. On peut en déduire que :
- A) f est croissante sur $[a; b]$.
 B) f' est croissante sur $[a; b]$.
 C) f est convexe sur $[a; b]$.
 D) C_f est en-dessous du segment $[AB]$.

Question 21.

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$ par $f(x) = \frac{x+3}{x+m}$. Pour quelles valeurs de m cette fonction est-elle strictement croissante sur $] -\infty; -6[$?

- a. $]3; +\infty[$ b. $]3; 6[$ c. $]3; 6[$ d. $[3; 6[$

Question 22.

Soit f une fonction de variable réelle dont le tableau de variations est donné ci-dessous. Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation : $2f(x) - 3 = 0$.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3		-1		3	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
								$-\infty$

- a. 2 b. 1 c. 4 d. 3

Question 23.

Soit f une fonction de variable réelle telle que pour tout x réel, $f'(x) = x(x+2)^2$. Déterminer le nombre d'extrema de f .

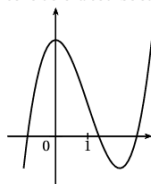
- a. 0 b. 3 c. 2 d. 1

Question 24.

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2-3x}$.

- a. $(2x-3)e^{x^2-3x}$ b. e^{x^2-3x} c. $(x^2-3x)e^{x^2-3x-1}$ d. $(x^2-3x)e^{2x-3}$

Attention! Pour les deux prochaines questions, on considère la courbe suivante :



Question 25.

Déterminer l'expression de la fonction dont la courbe représentative est la courbe ci-dessus.

- a. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ b. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$ c. $y = x^4 - 2x^2 + 3$ d. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

Question 26.

Sur quel intervalle est-elle convexe ?

- a. $]1; +\infty[$ b. $]0; +\infty[$ c. $] -\infty; 1[$ d. $] -\infty; 0[$

Question 27.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$. Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de f ?

- a. 2 b. 3 c. 4 d. 5

Question 28.

Parmi les fonctions suivantes, laquelle est convexe sur $]0; +\infty[$?

- a. $f(x) = \ln(e^x - 1)$ b. $f(x) = -\frac{1}{x}$ c. $f(x) = \ln(x)$ d. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

Question 29.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. La fonction f est :

- a. Décroissante sur $\mathbb{R}$ b. Décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ c. Décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d. Croissante sur $\mathbb{R}$

Question 30.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, dont le tableau de signes de la dérivée est donné ci-dessous. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(3-2x)$. Sur quel intervalle la fonction g est-elle strictement décroissante ?

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

- a. $]4; +\infty[$ b. $]2; 4[$ c. $]1; 2[$ d. $] -2; 1[$

Question 31.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2x^2 \ln(x) - x^2 + 3x - 2$. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse :

- a. $x = e$ b. $x = e^{-1}$ c. $x = -e$ d. $x = 1$

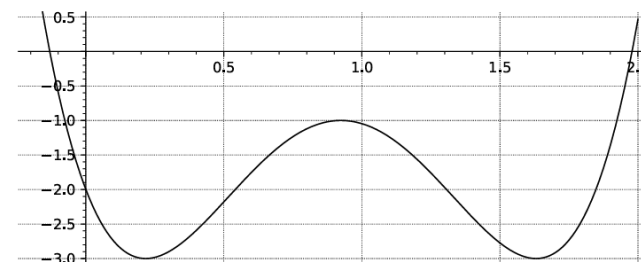
Question 32.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -x \ln(x) + 2x + 1$. La courbe représentative de f :

- a. Est entièrement située sous ses tangentes b. Est entièrement située au dessus de ses tangentes
 c. Traverse sa tangente au point $x = e$ d. Traverse sa tangente au point $x = 1$

Question 33.

On considère la figure suivante représentant la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$.



- a. 6 b. 12 c. 8 d. 9