

# Entrainement concours ingénieur post bac : Géométrie

## EXERCICE

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

- le point A de coordonnées  $(-4; 2; 1)$ ;
- la droite  $\mathcal{D}_1$  définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 7 + k \\ y = 6 + k \\ z = -3 - k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

- la droite  $\mathcal{D}_2$  passant par le point A et de vecteur directeur  $\vec{u}_2 (1; 0; 2)$ .

- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur  $\vec{u}_1$  de la droite  $\mathcal{D}_1$ .
- Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite  $\mathcal{D}_2$ . On notera  $t$  le paramètre.
- Dans cette question on va montrer que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas coplanaires.
  - Justifier que les droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  ne sont pas parallèles.
  - Montrer que l'intersection des droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est vide.
- On considère le vecteur  $\vec{w}$  de coordonnées  $(-2; 3; 1)$ .  
Montrer que  $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}_1$  et à  $\vec{u}_2$ .
- Soient B et C les points définis par  $\vec{AB} = \vec{w}$  et  $\vec{AC} = \vec{u}_2$  et  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(6; 5; -3)$ . On nomme  $\mathcal{P}$  le plan contenant les points A, B et C.
  - Montrer que  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .
  - $\mathcal{P}$  a donc une équation cartésienne de la forme :  $6x + 5y - 3z + d = 0$ , où  $d$  désigne un réel.  
Montrer que  $d = 17$ .
- On nomme E le point d'intersection du plan  $\mathcal{P}$  et de la droite  $\mathcal{D}_1$ .  
Déterminer les coordonnées  $(x_E; y_E; z_E)$  du point E.
- Soit  $\Delta$  la droite passant par E et de vecteur directeur  $\vec{w}$ .
  - Quel est le point d'intersection des droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  ?
  - Justifier que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_1$  sont perpendiculaires.
  - Justifier que la droite  $\Delta$  est incluse dans le plan  $\mathcal{P}$ .
  - En déduire que les droites  $\Delta$  et  $\mathcal{D}_2$  sont perpendiculaires.  
En conclusion, on a démontré que la droite  $\Delta$  est une perpendiculaire commune aux droites  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ .

## QCM

### Question 1

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. On définit les points A, B et C comme étant les points de coordonnées respectives  $(8; -2; 4)$ ,  $(8; -2; 14)$  et  $(0; -2; -2)$ .

On a alors :

- $AB > AC$
- $AB = AC$
- $AB < AC$
- on ne peut pas comparer AB et AC

### Question 2

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soient  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $2x - 3y + 6z - 2 = 0$  et A le point de coordonnées  $(-1; -1; -1)$ .

La distance du point A au plan  $\mathcal{P}$  est égale à :

- 1
- 2
- 3
- 7

### Question 3

Parmi les égalités suivantes, laquelle est vraie quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ?

- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

### Question 4

On suppose le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  $\mathcal{C}$  désigne le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit ABCD un carré dont les sommets appartiennent à  $\mathcal{C}$  et dont chaque côté est parallèle à l'un des axes du repère. Quelle est la longueur d'un côté de ce carré ?

- 1
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{3}$
- $\frac{2}{3}$

### Question 5

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé. Soient  $\mathcal{P}$  le plan d'équation cartésienne  $2x + y - z - 3 = 0$ , A le point de coordonnées  $(-1; 1; -4)$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

On admet que  $A \in \mathcal{P}$  et que  $\mathcal{D}$  est la droite perpendiculaire au plan  $\mathcal{P}$  passant par A.

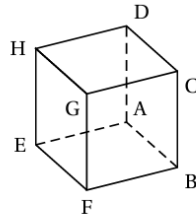
Soit B le point de  $\mathcal{D}$  de coordonnées  $(3; 3; -6)$ .

Si C est un point du cercle inclus dans  $\mathcal{P}$  de centre A et de rayon 5, alors BC =

- 6
- 7
- 36
- 49

# Entrainement concours ingénieur post bac : Géométrie

**Règle de nommage et représentation d'un cube :** Dans ce sujet, un cube ABCDEFGH, dénote le cube suivant (aux rotations près du cube) :



**Attention!** Pour les questions 1 à 5, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

## Question 1

On considère le plan  $(P)$  d'équation :  $x + 2y + 3z - 1 = 0$ .  
Quel vecteur est normal à  $(P)$  ?

- a.  $\vec{n}_1(1; 2; -1)$     b.  $\vec{n}_2(1; 2; 3)$     c.  $\vec{n}_3(1; 3; -1)$     d.  $\vec{n}_4(2; 3; -1)$

## Question 2

On considère la droite  $(d)$  d'équation :  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$ .  
Déterminer un vecteur directeur de la droite  $(d)$ .

- a.  $\vec{u}_1(2; 1; 1)$     b.  $\vec{u}_2(1; 2; -3)$     c.  $\vec{u}_3(-1; 2; 1)$     d.  $\vec{u}_4(2; 1; -3)$

## Question 3

On considère les points A(1; 3; 0) et B(5; 1; -2).  
Déterminer l'équation du plan médiateur du segment [AB].

- a.  $2x - y - z - 5 = 0$     b.  $2x - y - z + 5 = 0$     c.  $x + y + 2z - 3 = 0$     d.  $3x + 2y - z - 14 = 0$

## Question 4

On considère les trois points suivants :

$$A(-1; -2; 3) \quad B(-6; 1; 1) \quad C(-5; -3; 2)$$

Le triangle ABC est :

- a. équilatéral    b. rectangle en A    c. rectangle en C    d. isocèle en C

## Question 5

On considère les trois points suivants :

$$A(1; 2; 3); \quad B(3; 3; 5); \quad C(-1; 2; -4)$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (AB) :

- a.  $(-1; 1; 1)$     b.  $\left(2; \frac{5}{2}; 4\right)$     c.  $\left(0; \frac{3}{2}; 2\right)$     d.  $(-3; 0; -1)$

**Attention!** Dans les trois prochaines questions, on considère un cube ABCDEFGH, et les points : M le milieu de [CD], P le milieu de [GH] et N le centre de la face ABCD.

## Question 6

Quels sont les points coplanaires ?

- a. M, C, P et F    b. A, B, C et P    c. M, N, E et H    d. M, P, E et F

## Question 7

Le plan et la droite sécants sont :

- a. (ABE) et (CP)    b. (ABC) et (DH)    c. (MNH) et (BC)    d. (DAP) et (MG)

## Question 8

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{FG}$  dirigent le plan :

- a. (BCD)    b. (ABF)    c. (ABG)    d. (FGB)

## Question 9

Soit ABCDEFGH et BIJCFLKG deux cubes de même taille disposés côte à côte.

Soit le point X défini par  $\vec{AX} = 2\vec{CJ} + \vec{DH} + \vec{FG}$ .

Le point X se situe en :

- a. H    b. G    c. K    d. J

## Question 10

Soit ABCDEFGH un cube de côté non nul.

Soit les points I et J tels que  $\vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{EF}$  et  $\vec{GJ} = \frac{2}{3}\vec{GC}$ .

Quel vecteur est dans le plan dirigé par  $\vec{EC}$  et  $\vec{IJ}$  ?

- a.  $\vec{EA}$     b.  $\vec{FE}$     c.  $\vec{FG}$     d.  $\vec{FJ}$

## Question 11

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et un parallélépipède rectangle ABCDEFGH tel que  $AD = AE = xAB$ .

Pour quelle valeur de  $x$ , les droites (BH) et (AG) sont-elles orthogonales ?

- a. 1    b.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     c.  $\sqrt{2}$     d.  $\frac{1}{2}$