

Entrainement concours ingénieur post bac : Probabilités

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul. Tous les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible.

Une entreprise décide d'offrir à certains clients qui se connectent sur son site de vente en ligne une remise de 5 euros sur leur prochain achat.

La distribution des bons d'achat est programmée de la manière suivante :

- la probabilité que le premier client connecté obtienne un bon d'achat est $\frac{1}{5}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat, alors le client suivant gagne également un bon d'achat avec une probabilité de $\frac{3}{10}$;
- si le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas de bon d'achat, alors le client suivant ne gagne pas non plus de bon d'achat avec une probabilité de $\frac{9}{10}$.

On considère les événements suivants :

A_n : « le $n^{\text{ème}}$ client connecté gagne un bon d'achat de 5 euros »

$\overline{A_n}$: « le $n^{\text{ème}}$ client connecté ne gagne pas un bon d'achat de 5 euros ».

On note $a_n = P(A_n)$.

- I-1- Donner la valeur de a_1 .
- I-2- Compléter l'arbre de probabilités donné dans la feuille de réponses.
- I-3- Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de a_n .
- I-4- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{1}{10}$. Justifier la réponse.

Dans la suite, on pose $u_n = a_n - \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.

- I-5-a- Calculer u_1 .
- I-5-b- Justifier que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison q .
- I-6-a- Pour tout entier naturel n non nul, en déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- I-6-b- Montrer que $a_n = \frac{3}{8 \times 5^n} + \frac{1}{8}$ pour tout entier naturel n non nul.
- I-7- Justifier que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est convergente et donner sa limite l .
- I-8-a- Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n > \frac{1}{8}$.
- I-8-b- Déterminer le plus petit entier naturel n_0 à partir duquel $a_n - \frac{1}{8} \leq 10^{-5}$. Justifier la réponse en utilisant la fonction logarithme.

QCM

Sachant que $\binom{n}{2} = 15$, on peut affirmer que n est :

- a. impair
- b. multiple de 6
- c. un nombre premier
- d. multiple de 5

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(B) = \frac{1}{2}P(\overline{A})$ et $P(A \cup B) = 0,68$. On a alors $P(A) =$

- a. 0,6
- b. 0,06
- c. 0,36
- d. 0,46

On lance huit fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

La probabilité d'obtenir exactement 7 « Pile » est égale à :

- a. $\frac{1}{2}$
- b. $\frac{1}{2^3}$
- c. $\frac{1}{2^5}$
- d. $\frac{1}{2^8}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires telles que :

X suit la loi binomiale de paramètres n et 0,1 ;

Y suit la loi binomiale de paramètres n^2 et 0,1.

Quelle est la valeur de n sachant que $E(X + Y) = 2$?

- a. 1
- b.
- c. 3
- d. 4

Soient $X_1, X_2, \dots, X_5$, cinq variables aléatoires telles que pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq 5$, la variable aléatoire X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2^i}\right)$.

On définit également la variable aléatoire M par :

$$M = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i = \frac{1}{5} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$$

On a alors $E(M) :$

- a. $\frac{21}{20}$
- b. $\frac{21}{40}$
- c. $\frac{31}{40}$
- d. $\frac{31}{20}$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ de paramètres n et p , avec $p \in]0; 1[$.

On peut alors affirmer que :

- a. $E(X) = pV(X)$
- b. $V(X) = pE(X)$
- c. $E(X) = (1 - p)V(X)$
- d. $V(X) = (1 - p)E(X)$

Entrainement concours ingénieur post bac : Probabilités

Sachant que n est un entier naturel tel que $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$ on peut affirmer que n :

- a. est un multiple de 3
- a. est un multiple de 5
- c. est un multiple de 7
- d. est un multiple de 9

Soient A , B et C trois évènements tels que :

$$P(A) = P(\overline{B}) \quad \text{et} \quad B = \overline{C}$$

Sachant que $P(C) = 0,4$, on peut affirmer que $P(A)$ est égale à :

- a. 0,4
- b. 0,2
- c. 0,6
- b. 0,8

Soient A et B deux évènements tels que : $P(\overline{A} \cup B) = P(A \cup \overline{B})$.

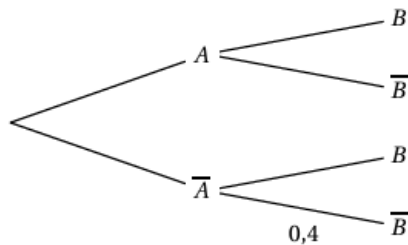
On peut alors affirmer que

- a. $P(A) = P(B)$
- b. $P(A) = P(\overline{B})$
- c. $P(A) = 0$
- d. $P(B) = 0$

Soient A et B deux évènements tels que :

$$P(A) = 0,8 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,7$$

On donne en outre l'arbre de probabilité en partie pondéré suivant :



On peut alors affirmer que la probabilité $P(A \cup B)$ est égale à :

- a. 0,92
- b. 0,72
- c. 0,84
- d. 0,90

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on définit le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x - 2z + 3 = 0$.

On lance un dé qui a la forme d'un tétraèdre régulier; on obtient ainsi de manière équiprobable un chiffre a tel que $1 \leq a \leq 4$.

Enfin, on définit le point A de coordonnées $(a^2; a+1; 3a)$.

La probabilité que A appartienne à $\mathcal{P}$ est égale à :

- a. $\frac{1}{4}$
- b. $\frac{3}{4}$
- c. $\frac{1}{3}$
- d. $\frac{1}{2}$

Soient X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et 0,1 et Y une seconde variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et 0,4 :

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,1) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,4)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes et on définit également la variable aléatoire Z par $Z = 2X - Y$.

Sachant que $V(Z) = 12$, on peut affirmer que $n =$

- a. 2
- b. 20
- c. 200
- d. Aucune de ces réponses n'est correcte

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$, n variables aléatoires deux à deux indépendantes et admettant toutes une espérance égale à m et une variance égale à σ^2 .

On peut alors affirmer que la variable aléatoire $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

admet une espérance et une variance, respectivement égales à :

- a. m et σ^2
- b. $\frac{m}{n}$ et $\frac{\sigma^2}{n}$
- c. m et $\frac{\sigma^2}{n}$
- d. m et $\frac{\sigma}{n}$