

Entrainement concours ingénieur post bac : Suites

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Partie A

- On considère la suite géométrique $(v_n)_{n \geq 1}$ de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = 1$.
 - Donner les valeurs exactes de v_2 et v_3 .
 - Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de v_n en fonction de n .
- On pose, pour tout $n \geq 1$, $A_n = \sum_{k=1}^n v_k = v_1 + \dots + v_n$.
 - Donner les valeurs exactes de A_1 , A_2 et A_3 .
 - Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_n = 4 \left[1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]$.
 - La suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est convergente. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. Justifier la réponse.
 - Déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 3$. On le notera n_0 . Justifier soigneusement la réponse.

Partie B

On effectue le coloriage d'un carré de côté 2 unités de longueur avec les consignes suivantes :

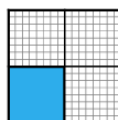
Étape 1 : partager le carré initial en quatre carrés identiques de côté de longueur c_1 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

Étape 2 : pour chacun des carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_2 et colorier le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-contre.

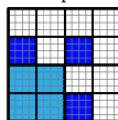
On poursuit le coloriage du carré selon le même procédé à chaque étape. Autrement dit, pour tout $n \geq 1$:

Étape n : pour chacun des k_n carrés non encore coloriés, faire un partage en quatre carrés identiques de côté de longueur c_n et colorier le carré situé en bas à gauche. On colorie k_n carrés à l'étape n .

On remarque que $k_1 = 1$, $k_2 = 3$.



Étape 1



Étape 2

- Faire le coloriage de l'étape 3.
 - Donner la valeur de k_3 .
 - Donner, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_{n+1} en fonction de k_n .
 - En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'expression de k_n en fonction de n .
- Donner les valeurs de c_1 , c_2 et c_3 .
 - Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.
- Justifier que l'aire, en unités d'aire (u. a.), de la surface qui est coloriée lors de l'étape n est égale au terme v_n de la suite définie dans la question A. 1.
- Que vaut l'aire, en u. a., de la surface totale coloriée à l'issue de l'étape n ?
 - Déterminer le nombre d'étapes minimal nécessaire pour colorier au moins les trois quarts du carré initial. Justifier la réponse.

Question 1.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{e^{-n}}{n+1}$, on peut alors affirmer que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

Question 2.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{2}{e^{-u_n} + 1}$, on peut alors affirmer que :

- (u_n) est divergente
- (u_n) est croissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
- (u_n) est décroissante

Question 3.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, et soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{\pi}{u_n}$. On peut alors affirmer que la suite (v_n) est :

- arithmétique
- bornée
- géométrique
- convergente

Question 4.

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n + 6}{u_n - 1}.$$

On peut alors affirmer que :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -6$

Question 5.

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{5} + 2 \end{cases}$

On peut alors affirmer que :

- (u_n) diverge
- (u_n) est strictement croissante
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 10 \times 0,6^n + 2n$

Question 6.

On considère le programme en Python suivant qui prend en entrée deux entiers $a \geq b > 0$:

```
def algorithme_mystere(a, b) :
    c = a % b
    while c != 0 :
        a = b
        b = c
        c = a % b
    return (b)
```

Si $a = 91$ et $b = 14$ en entrée, le programme ci-dessus renvoie :

- 1
- 6
- 7
- 14

Entrainement concours ingénieur post bac : Suites

Question 7.

La somme $\sum_{k=3}^{11} e^{2k} = e^6 + e^8 + \dots + e^{22}$ est égale à :

- a. $\frac{e^{24} - e^6}{e^2 - 1}$ b. $\frac{1 - e^{18}}{1 - e}$ c. $\frac{1 - e^{23}}{1 - e}$ d. $e^6 \times \frac{1 - (e^2)^8}{1 - e^2}$

Question 8.

Pour $n \geq 6$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n) : 2^n \geq (n+2)^2$.

- a. $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire b. $\mathcal{P}(n)$ est initialisée mais pas héréditaire
c. $\mathcal{P}(n)$ n'est ni initialisée ni héréditaire d. $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire mais pas initialisée

Question 9.

La somme de tous les entiers naturels pairs entre 0 et 1000 inclus est égale à :

- a. $2^{501} - 1$ b. $\frac{500 \times 501}{2}$ c. 501^2 d. 500×501

Question 10.

On considère le programme en Python suivant qui prend en entrée un entier naturel $N \geq 1$:

```
def algorithme_mystere(N) :
    u = 2
    S = 0
    for i in range(1, N+1) :
        S = S + u
        u = 2*u + i + 1
    return(S)
```

Le programme ci-dessus renvoie :

- a. la somme des N premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$
b. la somme des N premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 2$
c. la somme des $N + 1$ premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 1$
d. la somme des $N + 1$ premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + n + 2$

Question 11.

Soit un entier naturel N . On s'intéresse à la somme de tous les entiers entre 0 et N . Quelle est la plus petite valeur possible de N pour que cette somme dépasse 10π ?

- a. $N = 6$ b. $N = 7$ c. $N = 8$ d. $N = 9$

Question 12.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{\pi^n \times \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{e^{-n}}$. On peut alors affirmer que :

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d. (u_n) n'a pas de limite

Question 44.

Déterminer l'affichage de l'algorithme suivant, sachant que l'on saisi la valeur $n = 10$:

Algorithme 1 : Avenir 2023

```
1 Entrée
2 n : entier naturel
3 Variables
4 u : réel
5 i : entier naturel
6 Traitement
7   Saisir n
8   Pour i allant de 1 à n faire
9     u prend la valeur 1
10    u prend la valeur  $\frac{3}{6-2u}$ 
11 Afficher u
```

- a. 1 b. $\frac{33}{52}$ c. $\frac{52}{33}$ d. $\frac{3}{4}$

Question 45.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Avenir 2023 bis

```
1 Variables
2 u : réel
3 i : entier naturel
4 Initialisation
5 i prend la valeur 0
6 u prend la valeur 0
7 Traitement
8   Tant que i ≤ 10 faire
9     i prend la valeur i + 1
10    u prend la valeur 2u + 3
11 Afficher u
```

Que retourne cet algorithme ?

- a. Le 10^e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ c. Le 10^e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$
b. Le 11^e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ d. Le 11^e terme de la suite récurrente définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$