

Chapitre 11

Parcours 2

Comment simuler avec Python N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ ?

Exemple : X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,5

- a)** Déterminer l'espérance μ et l'écart-type σ de cette variable aléatoire.
- b)** On réalise une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X . Quel résultat la fonction `Distance` programmée ci-contre renvoie-t-elle ?
- c)** La fonction `Répétition` permet de simuler N échantillons de taille n de X . Quel résultat renvoie-t-elle ?

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def Distance(n):
5     somme=0
6     for k in range(n):
7         a=randint(1,10)
8         if a==1:
9             x=0
10            if 2<=a and a<=5:
11                x=1
12            if a>=6:
13                x=2
14            somme=somme+x
15     m=somme/n
16     d=abs(m-1.4)
17     return d
18
19 def Répétition(N,n):
20     s=sqrt(0.44)
21     r=0
22     for j in range(N):
23         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
24             r=r+1
25     p=r/N
26     return p

```

a) $E(X) = 0,1 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,5 \times 2 = 1,4.$

$$V(X) = 0,1 \times (0 - 1,4)^2 + 0,4 \times (1 - 1,4)^2 + 0,5 \times (2 - 1,4)^2.$$

$$V(X) = 0,44.$$

$$\text{Donc } \mu = 1,4 \text{ et } \sigma = \sqrt{0,44}.$$

b) La fonction `Distance` renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne m de l'échantillon de taille n et l'espérance μ de la variable aléatoire X .

c) La fonction `Répétition` renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre m et μ soit inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

Pour les exercices **1** et **2**, les 6 faces d'un dé équilibré sont numérotées 1, 1, 1, 2, 2, 3.

On lance ce dé, la variable aléatoire X donne le numéro obtenu. On admet que $E(x) = \frac{5}{3}$ et

$V(x) = \frac{5}{9}$. On réalise une simulation de N échantillons de taille n de la variable aléatoire X .

1 On s'intéresse à la fonction `Distance`.

a) Que représente chacune des variables `a`, `x`, `somme`, `m` et `d` dans cette situation ?

.....

b) Saisir et tester cette fonction.

2 On s'intéresse à la fonction `Répétition`.

a) Que représente chacune des variables `s`, `r` et `p` dans cette situation ?

.....

b) Saisir et tester cette fonction.

Pour les exercices **3** et **4**, un coffret contient 60 perles vertes et 40 perles bleues. On tire successivement et avec remise 2 perles du coffret. `X` est la variable aléatoire qui donne le nombre de perles vertes obtenues. On admet que $E(X) = 1,2$ et $V(X) = 0,48$.

3 La fonction `Distance` renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne d'un échantillon de taille `n` de `X` et l'espérance de `X`. Compléter la ligne 22 du programme.

4 La fonction `Répétition` réalise une simulation de `N` échantillons de taille `n` de `X`.

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def Distance(n):
5     somme=0
6     for k in range(n):
7         a=randint(1,6)
8         if a<=3:
9             x=1
10            if a==4 or a==5:
11                x=2
12            if a==6:
13                x=3
14            somme=somme+x
15        m=somme/n
16        d=abs(m-5/3)
17        return d
18
19 def Répétition(N,n):
20     s=sqrt(5/9)
21     r=0
22     for j in range(N):
23         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
24             r=r+1
25     p=r/N
26     return p
    
```

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def X():
5     x=0
6     a=randint(1,100)
7     b=randint(1,100)
8     if a<=60:
9         x=1
10    if b<=60:
11        x=x+1
12    return x
13
14 def Moyenne(n):
15     somme=0
16     for k in range(n):
17         somme=somme+X()
18     m=somme/n
19     return m
20
21 def Distance(n):
22     d=
23     return d
24
25 def Répétition(N,n):
26     s=sqrt(0.48)
27     r=0
28     for j in range(N):
29         if
30             r=r+1
31     p=r/N
32     return p
    
```

Nom : _____

Classe : _____

Elle renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et $E(X)$ soit inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

- a) Compléter la ligne 29 du programme.
- b) Saisir et tester les fonctions de ce programme.

Pour les exercices **5** et **6**, une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard et avec remise 5 boules de l'urne. La variable aléatoire X donne le nombre de fois où la boule numérotée 1 a été tirée. On admet que $E(X) = 1$ et $V(X) = 0,8$.

5 Écrire la fonction `Répétition` qui simule N échantillons de taille n de X et renvoie la proportion de ces échantillons tels que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et $E(X)$ soit inférieur ou égal à $\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

6 a) Saisir le programme obtenu.
b) Exécuter plusieurs fois `Répétition` (100, 10 000). Que dire de la proportion d'échantillons obtenus ? Interpréter ce résultat.

```
1 from math import *
2 from random import *
3
4 def X():
5     x=0
6     for i in range(5):
7         a=randint(1,5)
8         if a==1:
9             x=x+1
10    return x
11
12 def Moyenne(n):
13     somme=0
14     for k in range(n):
15         somme=somme+X()
16     m=somme/n
17     return m
18
19 def Répétition(N,n):
20
21
22
23
24
25
26 return p
```

.....

.....

.....

.....