Chapitre 11 **Intégration**

Fiche 3 : Calcul avec les intégrales

Propriétés : Soient f et g est deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $c \in [a; b]$

$\int_a^a f(x)dx = 0$

$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Pour tout réel k, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

Positivité de l'intégrale : Si f est positive sur [a ; b] alors $\int_a^b f(x)dx > 0$

Croissance de l'intégrale : Si $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration : Soit F une primitive de f.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)dx$$

Exemple :

1) Encadrer $\int_0^1 x\,cos(x)dx$.

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-x \leq xcos(x) \leq x$$

$$\int_0^1 -x\,dx \leq \int_0^1 x\,cos(x)dx \leq \int_0^1 x\,dx$$

$$\left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 x\,cos(x)dx \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x\,cos(x)dx \leq \frac{1}{2}$$

2) Expliquer pourquoi $\int_2^5 xe^x dx$ est positive.

Comme e^x est strictement positif et x est compris entre 2 et 5 donc est aussi positif, par positivité de l'intégrale, $\int_2^5 xe^x dx$ est positive.

Pour réviser : 111 et 113 p 260