Fiche cours :

Dénombrement

SOS Bac

On choisit k éléments dans un ensemble à n éléments.

A retenir :

En dénombrement, les réponses sont des nombres entiers positifs.

La traduction mathématique de « **ou** » correspond à l'**addition**.

La traduction mathématique de « **et ensuite** » correspond à la **multiplication**.

Exemple : Pour choisir un pseudo, je choisis soit une lettre et puis un chiffre ou je choisis une lettre et puis une lettre.

Il y a donc $26 \times 10 + 26 \times 26$ possibilités.

Type A : Avec ordre

Par exemple, les lettres dans un mot, un code, le résultat d'une compétition, le nombre de k-uplets …

1) Avec remise

$$\boldsymbol{n^k}$$

Pour chacun des k éléments tirés, j'ai à chaque fois n possibilités.

Exemple : Un cadenas à 4 chiffres a 10^4 codes possibles.

2) Sans remise : Aucune répétition : Les k-uplets distincts 2 à 2

Rappel : Factorielle de 6 : $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$$\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Pour chacun des k éléments tirés, j'ai à chaque fois 1 possibilité de moins.

Anagramme : Si $n = k$, il y a donc $n!$ possibilités au total.

Exemples : Un cadenas à 4 chiffres a $10 \times 9 \times 8 \times 7$ codes sans répétition possibles.

Il y a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ anagrammes du mot BAC (CAB, CBA, ABC, ACB, BCA).

3) Evénement contraire

Parfois on nous demande le nombre de k-uplets ayant au moins une répétition :

Avoir au moins une répétition est l'événement contraire de n'avoir aucune répétition :

$$\boldsymbol{n^k - \frac{n!}{(n-k)!}}$$

On soustrait à tous les k-uplets possibles ceux qui n'ont pas de répétition.

Exemple : Un cadenas à 4 chiffres a $10^4 - 10 \times 9 \times 8 \times 7$ codes possibles avec au moins deux nombres identiques.

Type B : Sans ordre Sans remise

Par exemple, la constitution d'un groupe d'élèves, un tirage de loto, le nombre de combinaisons …

Aucune répétition, pas d'ordre : Les combinaisons

$$\boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Le nombre de combinaison de k éléments noté $\binom{n}{k}$ est aussi le coefficient binomial k parmi n.

On peut utiliser la calculatrice Touches : math → PROB 3 : Combinaison n C k

Exemples : Dans une classe de 30 élèves, on veut faire un groupe de 5 élèves.

Il y a $\binom{30}{5} = 142\,506$ groupes possibles.

Dans une classe de 30 élèves, on veut faire un groupe de 5 élèves et un groupe de 3 élèves avec des élèves différents.

Il y a $\binom{30}{5} \times \binom{25}{3}$ groupes possibles.

Remarque : C'est la même résultat que faire un groupe de 3 élèves puis de 5 avec les élèves restants : $\binom{30}{3} \times \binom{27}{5}$

Type C : Calcul combinatoire (Niveau 3)

On demande parfois (rarement) de prouver des égalités avec des coefficients binomiaux.

Quelques formules que l'on peut retenir :

$$\boldsymbol{(n+1)!} = \boldsymbol{(n+1)} \times n \times (n-1) \dots \times 2 \times 1 = \boldsymbol{(n+1)}n!$$

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$$

$$\boldsymbol{k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}}$$