Fiche cours :

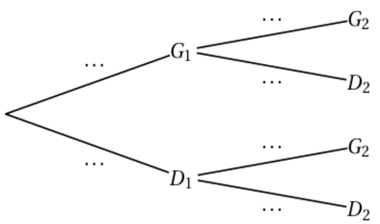
Probabilités et suites (niveau 2)

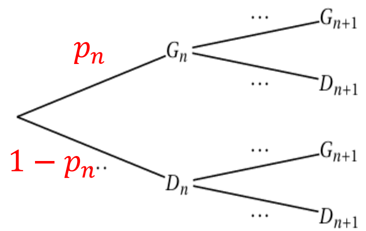
SOS Bac

Mêlées aux suites, les évènements auront un indice désignant un jour ou une étape temporelle. Généralement le premier indice est 1.

Exemple : G_n: Gagner la nième partie de la journée.

1) On peut vous demander deux arbres différents : soit celui pour les 2 premiers jours où il n'y aura que des nombres sur les branches. L'autre arbre commence au nième jour, les premières branches contiennent des calculs littéraux.





2) Montrer que $p_{n+1} = \cdots p_n + \cdots$

Pour calculer la probabilité d'un événement écrit plusieurs fois dans l'arbre, on additionne les chemins qui mènent à cet évènement. On peut aussi faire le calcul en fonction de p_n (deuxième arbre).

Les chemins $G_n \cap G_{n+1}$, $G_n \cap \overline{G_{n+1}}$, $\overline{G_n} \cap G_{n+1}$ et $\overline{G_n} \cap \overline{G_{n+1}}$ forment une partition de l'univers,
par la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$$
$$= p_n \times \ldots + (1 - p_n) \times \ldots$$

On développe pour retrouver le formule de la question.

3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3 étapes à suivre :

a) Changement d'indice en n+1 pour la formule de v_n.
b) On remplace p_{n+1} avec la formule q2).
c) On remplace p_n par $v_n \pm \cdots$ selon la formule q3) avec p_n isolé.
d) On développe et on simplifie.

Modèle : $v_n = p_n - 0{,}4$

$v_{n+1} = p_{n+1} - 0,4$
$v_{n+1} = 0,5p_n + 0,2 - 0,4$
$v_{n+1} = 0,5(v_n + 0,4) + 0,2 - 0,4$
$v_{n+1} = 0,5v_n + 0,2 + 0,2 - 0,4 = 0,5v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_1 = p_1 - 0,4 = 0,1$.

4) Donner p_n en fonction de n. (Cette question est parfois divisée en 2)

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$ Attention à l'indice de départ ici on commence à v_1.
$p_n = v_n + 0,4 = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$

5) Calculer la limite de p_n. Interpréter.

Comme -1<q<1, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ donc par somme et produit,
$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,1 \times 0 + 0,4 = 0,4$ (On remplace le calcul en …^{n} par 0)
Interprétation : Au bout d'un très grand nombre de jeux, on aura 40% de chance de gagner.

6) Résoudre une inéquation

On remplace g_n par la formule précédente et on suit l'ordre inverse des priorités opératoires : 1) +/- 2) ×/÷ 3) fonctions 4) (...)

La fonction ln permet de sortir la puissance.

Attention à la division par ln(...)<0 !

Exemple : $p_n - 0{,}4 \leq 0{,}001$

$$0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 - 0,4 \leq 0,001$$
$$0,1 \times 0,5^{n-1} \leq 0,001$$
$$0,5^{n-1} \leq \frac{0,001}{0,1} = 0,01$$
$$ln(0,5^{n-1}) \leq ln(0,01)$$
$$(n-1)ln(0,5) \leq ln(0,01)$$
$$n - 1 \geq \frac{ln(0,01)}{ln(0,5)}$$
$$n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} + 1 \approx 6,64$$

Interprétation : A partir de n=7 parties, la probabilité de gagner se rapproche de 40% avec un écart inférieur à 0,1%.

7) Compléter un algorithme de seuil

Si l'algo donne la plus petite valeur de n telle que $p_n \geq A$

```
def seuil():
    p = 'on met la 1ere valeur de la suite p_n'
    n = 'on met la 1er indice (généralement 1)'
    while p<A : 'on écrit l inéquation inverse sans indice'
        p = 'on écrit la formule de récurrence sans indice'
        n = n + 1
    return n
```