Fiche cours : Probabilité (niveau 3) SOS Bac

Type A : Etude de la loi binomiale

Soit X la loi binomiale de paramètre n et p.

1) Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de X

$E(X) = n \times p$ $\quad$ $V(X) = n \times p \times (1-p)$ $\quad$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Interprétation de l'espérance : En moyenne, …

Si la loi est une loi de Bernoulli (je gagne ou je perds une seule fois), les formules sont les mêmes avec n=1.

2) Trouver le nombre n ou p pour que la probabilité que X soit au moins égal à 1 soit supérieure ou égal à 99%.

Attention ! On adapte l'inéquation au sujet, ce n'est pas toujours 99%.

$$p(X \geq 1) > 0,99$$
$$1 - p(X=0) \geq 0,99$$
$$1 - (1-p)^n \geq 0,99$$
$$0,01 \geq (1-p)^n$$
$$ln(0,01) \geq n \times ln(1-p)$$

Si on cherche n,

$$n \geq \frac{ln(0,01)}{ln(1-p)}$$

Si on cherche p,

$$e^{\left(\frac{ln(0,01)}{n}\right)} \geq 1 - p$$
$$p \geq 1 - e^{\left(\frac{ln(0,01)}{n}\right)}$$

Attention, pour la dernière ligne,
l'inégalité change d'ordre car on divise par ln(1-p) qui est négatif !
On arrondi n à l'aide de la calculatrice à l'entier supérieur.

Type B : Espérance et variance d'une loi non binomiale

1) Donner la loi de probabilité de Y

On complète un tableau à deux lignes avec les valeurs possibles de Y :

$Y = y_i$	y_1	y_2 ….	y_n
$p(Y = y_i)$	p_1	p_2 …	p_n

La somme p_i est égale à 1.
Pour trouver l'espérance de Y, on fait la somme des produits du nombre du haut par sa probabilité.

2) Espérance et variance d'une loi somme ou multiple

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \quad et \quad E(aX) = aE(X)$$
$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) \; si \; X_1 et \; X_2 \; indépendantes$$
$$et \quad V(aX) = a^2 V(X)$$

Type C : Bienaymé-Tchebychev ou inégalité de concentration

1) Montrer que la probabilité de X compris entre … et … (les valeurs sont données dans le sujet) soit supérieure à 0,75.

On transforme l'encadrement en inégalité avec valeur absolue :

$$E(X) - \delta < X < E(X) + \delta \Leftrightarrow |X - E(X)| < \delta$$

Pour trouver la valeur de $\boldsymbol{\delta}$, on peut soustraire les deux nombres encadrant X et diviser par 2.

On utilise BT :

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

On passe à l'évènement contraire :

$$p(|X - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Enfin on vérifie que :

$$1 - \frac{V(X)}{\delta^2} \geq 0,75$$

2) Déterminer n pour que la probabilité que $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ soit compris entre … et … (les valeurs sont données dans le sujet) soit supérieure à 0,4.

La variable aléatoire M_n représente la **moyenne** des variables X_i.
Si dans un sujet similaire on donne F_n, c'est la **fréquence**.

Soit $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ **alors** $E(M_n) = E(X)$
et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ **car les** X_i **sont indépendantes.**

L'inégalité de concentration est la même formule que BT pour M_n :

Par l'inégalité de concentration :

$$p(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

On passe à l'évènement contraire :

$$p(|M_n - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Enfin on résout l'inéquation :

$$1 - \frac{V(X)}{n\delta^2} \geq 0,4$$
$$0,6 \geq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$
$$n \geq \frac{V(X)}{0,6\delta^2}$$

Et on arrondi à l'entier supérieur pour trouver n.