Partie C : Les questions courantes

1) Déterminer le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite (AB).

On détermine l'équation du plan P qui passe par M et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
Puis l'équation paramétrique de la droite (AB).
Et enfin on fait l'intersection de la droite et du plan.

2) Montrer que 4 points sont coplanaires.

On calcule les coordonnées de trois vecteurs en utilisant les lettres A, B, C ou D.

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} + k'\overrightarrow{AD}$$

On passe ensuite à trois lignes : $\begin{cases} x_{AB} = kx_{AC} + k'x_{AD} \\ y_{AB} = ky_{AC} + k'y_{AD} \\ z_{AB} = kz_{AC} + k'z_{AD} \end{cases}$

On doit obtenir pour les trois lignes une seule valeur pour k et k'.

3) Déterminer la position relative de 2 droites.

Une représentation paramétrique de (d_1) est $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$

Une représentation paramétrique de (d_2) est $\begin{cases} x = x_B + a'k \\ y = y_B + b'k \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \\ z = z_B + c'k \end{cases}$

On vérifie que les deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
On fusionne les deux systèmes et on garde la ligne aux valeurs les plus compliquées comme ligne de contrôle.
Avec les deux autres lignes, on détermine les valeurs de t et k.
Si avec ses valeurs la ligne de contrôle est vraie, les deux droites sont sécantes (on remplace t ou k par sa valeur dans l'équation paramétrique pour trouver les coordonnées du point d'intersection).
Sinon les deux droites sont non coplanaires.

4) Déterminer la position relative de 2 plans.

On compare leurs vecteurs normaux :
Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors les plans sont parallèles.
Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux alors les plans sont perpendiculaires.

5) Déterminer la position relative d'un plan et d'une droite.

On compare le vecteur normal et le vecteur directeur :
Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires alors le plan et la droite sont perpendiculaires.
Si $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux alors le plan et la droite sont parallèles.

Partie D : Les questions rares

1) Justifier qu' une droite (d_1) est orthogonale à une autre droite dont on ne connait pas l'équation.

(d_1) est perpendiculaire au plan P car … (il faut citer deux angles droits avec le plan).
Or si une droite est perpendiculaire à un plan alors elle est orthogonale avec toutes les droites incluses dans ce plan.
Donc (d_1) est orthogonale à (d_2).

2) Montrer que 3 vecteurs forment une base de l'espace.

On calcule

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

On passe ensuite à trois lignes : $\begin{cases} ax_u + bx_v + cx_w = 0 \\ ay_u + by_v + cy_w = 0 \\ az_u + bz_v + cz_w = 0 \end{cases}$

On doit obtenir par combinaison $a = b = c = 0$.

3) Trouver l'intersection entre une sphère et une droite.

L'équation d'une sphère est $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2$ où r est le rayon et $x_C, y_C, z_C)$ les coordonnées du centre.
On remplace x, y, z par les formules en t (ou k) de l'équation paramétrique de la droite.
On trouve une équation du second degré (résoudre avec Δ).

4) Trouver l'équation de l'intersection entre deux plans.

L'équation de P est $ax + by + cz + d = 0$.
L'équation de P' est $a'x + b'y + c'z + d' = 0$
On choisit de fixer une lettre $x, y \text{ ou } z$ pour paramètre t.
Cela nous donne un système de deux équations à deux inconnues en fonction de t. On trouve les deux autres lettres en fonction de t et enfin une équation paramétrique de droite.