Fiche cours :

Géométrie classique

SOS Bac

On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Partie A : Les questions incontournables

1) Lire les coordonnées d'un point.

On part de l'origine A, le premier vecteur porte l'axe des x, le deuxième porte l'axe des y et le troisième porte l'axe des z.

2) a) Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJK).

On calcule les coordonnées de deux vecteurs en utilisant les lettres I, J ou K.

$$\overrightarrow{IJ}.\vec{n} = xx' + yy' + zz' = 0 \text{ et } \overrightarrow{IK}.\vec{n} = xx' + yy' + zz' = 0$$

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

Une équation cartésienne de plan est $ax + by + cz + d = 0$.
On remplace a, b et c par les coordonnées de $\vec{n}$.
Pour trouver d, on x, y et z par les coordonnées d'un point du plan et on isole d.

c) Montrer que M, I, J et K ne sont pas coplanaires.

On remplace x, y et z par les coordonnées de M dans l'équation du plan (GHF) et on vérifie que $ax_M + by_M + cz_M + d \neq 0$

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par M perpendiculaire au plan (IJK).

Une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = x_M + at \\ y = y_M + bt \\ z = z_M + ct \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$
Un vecteur directeur de la droite est le vecteur normal $\vec{n}$ au plan.

4) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (IJK).

On cherche l'intersection du plan et de la droite perpendiculaire au plan passant par M. On remplace les x, y et z dans l'équation du plan par les calculs avec t de l'équation paramétrique :

$$a(x_M + at) + b(y_M + bt) + c(z_M + ct) + d = 0$$

On développe et on trouve la valeur de t puis on replace t dans l'équation paramétrique.

5) Déterminer la distance entre M et le plan.

La distance est la longueur $MH = \sqrt{(x_M - x_H)^2 + (y_M - y_H)^2 + (z_M - z_H)^2}$

Partie B : Les questions courantes

1) Montrer que trois points A,B,C ne sont pas alignés ou forment un plan.

On vérifie que deux vecteurs formés avec les trois points ne sont pas colinéaires :

$\overrightarrow{AB}$	**x**	**y**	**z**
$\overrightarrow{AC}$	**x'**	**y'**	**z'**

Le tableau n'est un tableau de proportionnalité.

2) Montrer que deux plans sont parallèles (sinon sécants).

On vérifie que deux vecteurs normaux sont colinéaires :

$$\vec{n} = k\overrightarrow{n'}$$

3) Montrer que deux droites sont perpendiculaires.

On vérifie que deux vecteurs directeurs sont orthogonaux :

$$\vec{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy' + zz' = 0$$

et on explique que les droites sont aussi coplanaires.

4) Calculer un angle

$\cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA \times BC}$

$\widehat{ABC} = \cos^{-1}(\ldots)$

Attention les vecteurs commencent du sommet de l'angle !
On garde la valeur exacte pour être précis sur la valeur de l'angle.

5) Justifier qu'une droite est la hauteur d'un tétraèdre

La hauteur d'une pyramide est la droite perpendiculaire à une face et passant par le sommet opposé.

6) a) Calculer le volume d'une pyramide.

Généralement, soit l'aire de la base est donnée soit c'est un triangle rectangle :

$$\mathcal{A}_{triangle\ rectangle} = \frac{1}{2} \times \text{côté de l'angle droit} \times \text{côté de l'angle droit}$$

$$\mathcal{V}_{pyramide} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{Base} \times hauteur$$

b) En déduire l'aire d'un triangle.

On change de base pour le triangle quelconque.
La nouvelle hauteur est la distance entre le point et son projeté trouvée dans les questions précédentes.

$$\mathcal{A}_{triangle} = 3 \times \frac{\mathcal{V}_{pyramide}}{distance}$$