

Introduction aux primitives pour la physique

Cours à compléter et exercices d'application

1. Définition et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F , dérivable sur I , est une **primitive de f sur I** si, pour tout $x \in I$,

$$\boxed{\dots\dots\dots}$$

Vérifier une primitive. Soient $f(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2}$ et $F(x) = \frac{4}{3x-2}$ sur $I = \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$. Calculer $F'(x)$ puis conclure.

.....

Toutes les primitives. Si F est une primitive de f sur I , les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto \dots\dots\dots$, où C est une $\dots\dots\dots$. Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle différent donc d'une $\dots\dots\dots$.

Exemple. Les primitives de $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = \dots\dots\dots$.

2. Primitives usuelles

Compléter le tableau : on donne ici **une** primitive, sans constante.

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Conditions / intervalle I
k (constante réelle)	$\dots\dots\dots$	$I = \mathbb{R}$
x^n	$\dots\dots\dots$	$n \in \mathbb{N}, I = \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$	$\dots\dots\dots$	$n \geq 2$ entier ; $0 \notin I$
$\frac{1}{x}$	$\dots\dots\dots$	$0 \notin I$
$\sin x$	$\dots\dots\dots$	$I = \mathbb{R}$
$\cos x$	$\dots\dots\dots$	$I = \mathbb{R}$

3. Somme et multiplication par une constante

Si F et G sont des primitives de f et g sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$, une primitive de $\lambda f + g$ est $\dots\dots\dots$.

Exercice 1. Déterminer **toutes les primitives** de chaque fonction sur l'intervalle indiqué. Ne pas oublier la constante !

a. $f(x) = 4x^3 - 2x + 1, I = \mathbb{R}$

$F(x) = \dots\dots\dots$

.....

.....

b. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{5x^3}, I =]0; +\infty[$

$F(x) = \dots\dots\dots$

.....

.....

Introduction aux primitives — suite

4. Reconnaître une fonction composée

Compléter le tableau en s'aidant des règles de dérivation. Dans les trois premières lignes, $a \neq 0$. Dans les trois dernières, u est dérivable sur I et $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	Une primitive $F(x)$	Conditions
e^{ax+b}		$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$\cos(ax + b)$		$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$\sin(ax + b)$		$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$
$u'(x) [u(x)]^n$		$n \geq 0$
$\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$		$n \geq 2; u(x) \neq 0 \text{ sur } I$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$		$u(x) \neq 0 \text{ sur } I$

Méthode. Repérer u , calculer u' , puis ajuster le coefficient pour faire apparaître une forme du tableau. Vérifier le résultat en dérivant.

Exercice 2. Pour chaque fonction, indiquer $u(x)$ et $u'(x)$, réécrire f sous une forme du tableau, puis donner une primitive.

a. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$. $u(x) = \dots\dots\dots$ $u'(x) = \dots\dots\dots$

b. $f(x) = x(x^2 + 3)^3$ sur $\mathbb{R}$. $u(x) = \dots\dots\dots$ $u'(x) = \dots\dots\dots$

c. $f(x) = \frac{3}{(5x + 1)^3}$ sur $I = \left] -\frac{1}{5}; +\infty \right[$. $u(x) = \dots\dots\dots$ $u'(x) = \dots\dots\dots$

5. Déterminer une primitive avec une condition initiale

Si f admet des primitives sur I et $x_0 \in I$, il existe une **unique** primitive F vérifiant $F(x_0) = y_0$. On écrit d'abord $F(x) = F_0(x) + C$, puis on détermine grâce à la condition donnée.

Exercice 3. Déterminer la primitive qui vérifie la condition initiale.

a. $f(x) = \cos x$, $I = \mathbb{R}$, $F(0) = -1$.

 b. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, $I =]0; +\infty[$, $F(1) = 2$.

