

Devoir surveillé – Type baccalauréat

Suites et étude de fonctions – Note sur 20

Durée conseillée : 2 heures – Calculatrice en mode examen autorisée, échange interdit

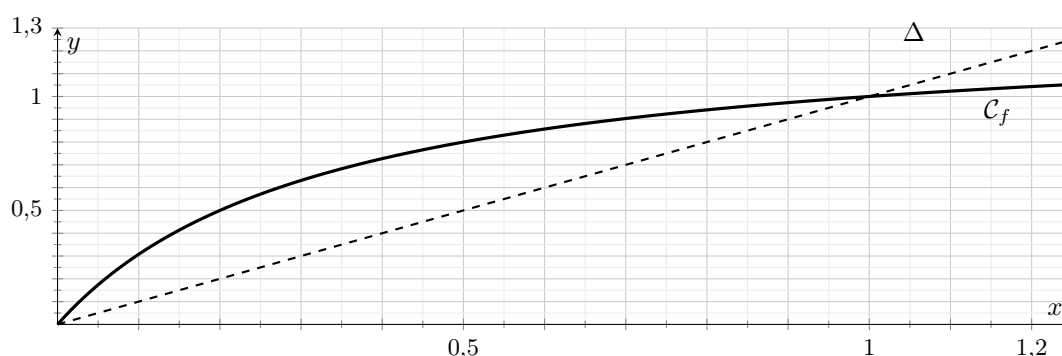
Les réponses doivent être justifiées, sauf lorsqu’une lecture graphique est demandée. Les deux exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.

Exercice 1 – Une suite récurrente

10 points

On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que f est strictement croissante sur son domaine.

Le graphique ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ d’équation $y = x$. Il est à compléter sur le sujet.



1. Construction graphique et premier calcul – 3 points

- À partir de u_0 , construire en escalier les premiers termes u_1 , u_2 et u_3 , en utilisant $\mathcal{C}_f$ et Δ . Faire apparaître les traits de construction et placer ces termes sur l’axe des abscisses. (1,5 pt)
- Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) . (0,5 pt)
- Calculer la valeur exacte de u_1 . (1 pt)

2. Encadrement et monotonie – 2,5 points

- Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$. (2 pt)
- En déduire le sens de variation de (u_n) et un majorant de cette suite. (0,5 pt)

3. Expression du terme général – 3 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

- Montrer que (v_n) est géométrique de raison 4. Calculer v_0 et en déduire v_n en fonction de n . (1,5 pt)
- Exprimer u_n en fonction de v_n , puis démontrer que $u_n = \frac{1}{1 + (0,25)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1,5 pt)

4. Algorithmique – 1,5 point

Pour un réel $E > 0$, la fonction Python ci-dessous renvoie le plus petit entier n tel que $1 - u_n < E$. On admet qu’elle se termine.

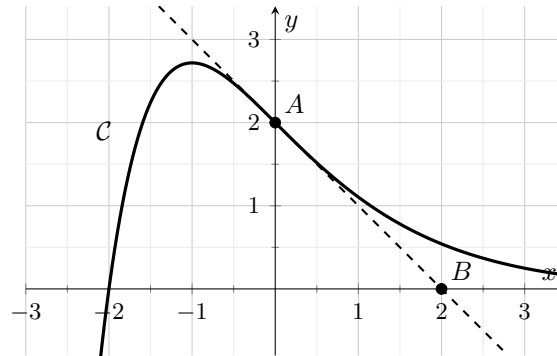
```
def seuil(E):  
    u = 0.5  
    n = 0  
    while ...:  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```

- Recopier et compléter les deux lignes incomplètes. (1 pt)
- Donner la valeur renvoyée par `seuil(10**(-4))`. (0,5 pt)

Exercice 2 – Étude d’une fonction

10 points

Dans cet exercice, f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On a représenté ci-dessous une portion de sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé. La droite (AB) est tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(0;2)$, et B a pour coordonnées $(2;0)$.



Partie 1 – Lectures graphiques

2 points

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1. Donner $f(0)$ et $f'(0)$. (1 pt)
2. Donner une équation de la tangente (AB) . (0,5 pt)
3. Donner un intervalle sur lequel f semble convexe. (0,5 pt)

Partie 2 – Étude analytique

8 points

1. Dérivée et variations – 2,5 points

- a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$. (1 pt)
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, sans indiquer de limites. Préciser la valeur exacte de l'extremum. (1,5 pt)

2. Résolution d'une équation – 2 points

- a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0; 2]$. (1,5 pt)
- b. Donner une valeur approchée au centième de α . (0,5 pt)

3. Convexité – 1,5 point

- a. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,5 pt)
- b. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de concavité et de convexité de f . En particulier, f est-elle convexe sur $[0; +\infty[$? (1 pt)

4. Tangente et comparaison – 2 points

- a. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, tracée sur le graphique. Vérifier la lecture graphique de la partie 1. (1 pt)
- b. À l'aide de la convexité, en déduire que, pour tout $x \geq 0$, $(x+2)e^{-x} \geq 2-x$. (1 pt)