

Correction du devoir surveillé

Suites et étude de fonctions

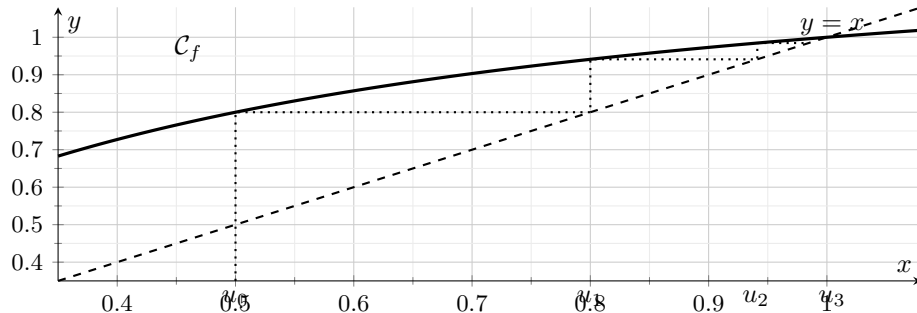
Exercice 1 – Une suite récurrente

On a $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construction graphique et premier calcul

a.

Pour construire les termes en escalier, on monte verticalement depuis (u_n, u_n) jusqu'à la courbe $\mathcal{C}_f$, puis on se déplace horizontalement jusqu'à la droite $y = x$: l'abscisse obtenue est u_{n+1} .



La suite semble croissante.

b. $u_1 = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{5/2} = \boxed{\frac{4}{5}}$.

2. **Encadrement et monotonie** Posons $P_n : \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$. Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$, donc P_0 est vraie. Supposons P_n vraie. Comme f est strictement croissante, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$. De plus, pour $0 \leq x < 1$, $f(x) < 1$, car $4x < 1 + 3x$ équivaut à $x < 1$. Ainsi $u_{n+2} < 1$. L'inégalité $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$ vient de P_n . Donc P_{n+1} est vraie, et par récurrence $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$ pour tout n . La suite est donc croissante et majorée par 1.

3. **Expression du terme général** Comme $u_n < 1$, le quotient $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$ est bien défini.

$$v_{n+1} = \frac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}} = \frac{4u_n}{1 - u_n} = 4v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 4, et $v_0 = 1$; donc $v_n = 4^n$. De $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$, on tire $u_n = \frac{v_n}{1 + v_n}$. Par conséquent,

$$\boxed{u_n = \frac{4^n}{1 + 4^n} = \frac{1}{1 + (0,25)^n}}.$$

4. **Algorithmique** La boucle doit continuer tant que la condition de sortie n'est pas atteinte, soit tant que $1 - u \geq E$. Dans le corps de la boucle, on calcule le terme suivant :

while 1 - u >= E: u = 4*u/(1+3*u).

Pour $E = 10^{-4}$, on cherche le plus petit n tel que $\frac{1}{4^n + 1} < 10^{-4}$, autrement dit $4^n + 1 > 10\,000$. Or $4^6 + 1 = 4097 < 10\,000$ et $4^7 + 1 = 16\,385 > 10\,000$. La fonction renvoie donc $\boxed{7}$.

Exercice 2 – Étude d’une fonction

Ici $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

Partie 1 – Lectures graphiques

Le point $A(0; 2)$ appartient à la courbe : $f(0) = 2$. La pente de la tangente (AB) vaut $\frac{0-2}{2-0} = -1$, donc $f'(0) = -1$ et une équation de cette tangente est $y = 2 - x$. La courbe semble convexe sur $[0; +\infty[$.

Partie 2 – Étude analytique

1. Dérivée et variations Par la règle du produit,

$$f'(x) = e^{-x} - (x+2)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$: il est positif si $x < -1$, nul si $x = -1$ et négatif si $x > -1$. Ainsi f est croissante sur $] -\infty; -1]$, puis décroissante sur $[-1; +\infty[$. Son maximum est atteint en $x = -1$ et vaut $f(-1) = e$. Le tableau de variations, sans valeurs de limites, est

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f		e	

$\nearrow$ $\searrow$

2. Résolution de $f(x) = 1$

La fonction f est continue sur $[0; 2]$ et f est strictement décroissante sur cet intervalle. En outre, $f(0) = 2 > 1$ et $f(2) = 4e^{-2} < 1$ (car $e^2 > 4$). Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure donc l'existence et l'unicité de $\alpha \in [0; 2]$ tel que $f(\alpha) = 1$.

À la calculatrice, $\alpha \approx 1,14619$, donc au centième $\alpha \approx 1,15$.

3. Convexité En dérivant une seconde fois,

$$f''(x) = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

Puisque $e^{-x} > 0$, $f''(x)$ a le signe de x . La fonction est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$. Elle est donc bien convexe sur l'intervalle demandé ; $(0; f(0)) = (0; 2)$ est un point d'inflexion.

4. Tangente et comparaison L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) = 2 - x.$$

Elle passe bien par $A(0; 2)$ et $B(2; 0)$, conformément à la lecture graphique. Une fonction convexe se situe au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle où elle est convexe. Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$\boxed{f(x) \geq 2 - x}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{(x+2)e^{-x} \geq 2 - x}.$$