Corrigé détaillé – Devoir Maison n°2

13 novembre 2026

Exercice 1

On considère $f(x) = e^{x^2-2}$.

1. Ensemble de définition

Le carré x^2, la soustraction de 2 et la fonction exponentielle sont définis pour tout réel. Ainsi,

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}.}$$

2. Schéma de composition et variations

On peut écrire la fonction comme la succession des opérations

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto x^2 - 2 \longmapsto e^{x^2-2}.$$

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis croissante sur $[0, +\infty[$. La soustraction de 2 ne change pas le sens de variation, et l'exponentielle est strictement croissante. Par composition, f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$. Son minimum est atteint en $x = 0$ et vaut $f(0) = e^{-2}$.

3. Dérivée

On dérive une composée : la dérivée de $x^2 - 2$ est $2x$, et celle de e^u est e^u. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x) = 2xe^{x^2-2}.}$$

4. Variations à l'aide de la dérivée

L'exponentielle étant toujours strictement positive, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x$: négatif si $x < 0$, nul si $x = 0$, positif si $x > 0$. On retrouve ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0		$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e^{-2}	$\nearrow$	$+\infty$

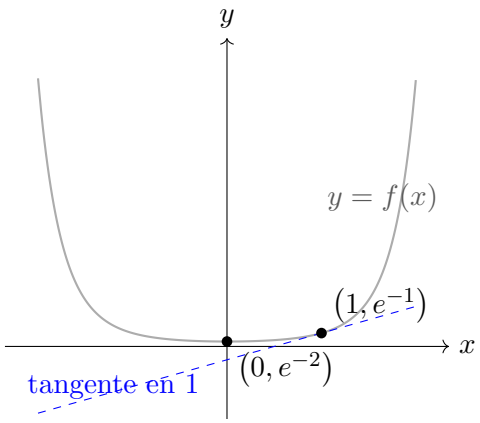
En effet, $x^2 - 2 \to +\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$, donc $f(x) \to +\infty$ aux deux extrémités.

5. Convexité et vérification graphique

En dérivant encore,

$$f''(x) = 2e^{x^2-2} + 4x^2 e^{x^2-2} = (2 + 4x^2)e^{x^2-2}.$$

Les deux facteurs sont strictement positifs pour tout réel x, donc $f''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$; sa courbe est tournée vers le haut. Le croquis confirme aussi la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et le minimum en $(0, e^{-2})$. La droite tracée en pointillés est la tangente en $x = 1$; la courbe reste au-dessus d'elle.



6. Tangente en 1

On a $f(1) = e^{-1} = 1/e$ et $f'(1) = 2/e$. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Pour $a = 1$,

$$y = \frac{1}{e} + \frac{2}{e}(x - 1) = \boxed{\frac{2x - 1}{e}}.$$

7. Inégalité

Une fonction convexe et dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes. Ainsi, pour tout réel x,

$$e^{x^2-2} \geq \frac{2x-1}{e}.$$

En multipliant par $e > 0$, on obtient

$$\boxed{e^{x^2-1} \geq 2x-1.}$$

Comme f est strictement convexe, l'égalité n'a lieu qu'au point de tangence $x = 1$. L'inégalité stricte demandée dans l'énoncé est donc vraie pour $x \neq 1$; en $x = 1$, les deux membres valent 1.

Exercice 2

On considère $g(x) = x\sqrt{x-2}$.

1. Ensemble de définition

Pour que la racine carrée soit définie, il faut $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$. Le facteur x ne pose pas de restriction supplémentaire. Donc

$$\boxed{D_g = [2, +\infty[.}$$

2. Schéma de composition et variations

Son schéma de construction est $x \longmapsto x-2 \longmapsto \sqrt{x-2}$, puis on multiplie par x. La fonction s'écrit comme le produit de x et de $\sqrt{x-2}$. Sur $[2, +\infty[$, ces deux facteurs sont positifs ou nuls et croissants : x est croissante, et $x \mapsto \sqrt{x-2}$ est croissante. Leur produit est donc croissant sur cet intervalle. Ainsi $g(2) = 0$ est son minimum, et $g(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

3. Dérivée

La fonction est dérivable pour $x > 2$. Par la formule du produit et la dérivation de la racine,

$$g'(x) = \sqrt{x-2} + \frac{x}{2\sqrt{x-2}} = \boxed{\frac{3x-4}{2\sqrt{x-2}}} \qquad (x > 2).$$

La dérivée n'est pas définie en $x = 2$.

4. Variations à l'aide de la dérivée

Pour $x > 2$, le dénominateur de $g'(x)$ est positif et $3x - 4 > 0$. Donc $g'(x) > 0$ sur $]2, +\infty[$. Avec la continuité de g en 2 et $g(2) = 0$, on retrouve que g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$:

x	2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$

5. Convexité et vérification graphique

Pour $x > 2$, on dérive l'expression de g' :

$$g''(x) = \frac{3x - 8}{4(x-2)^{3/2}}.$$

Le dénominateur est positif sur $]2, +\infty[$. Le numérateur s'annule en $x = \frac{8}{3}$, est négatif avant et positif après. Par conséquent, g est concave sur $]2, \frac{8}{3}[$ puis convexe sur $]\frac{8}{3}, +\infty[$. La courbe admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{8}{3}$ et d'ordonnée

$$g\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{9}.$$

Le croquis confirme que g est croissante, d'abord concave puis convexe. Au voisinage de $x = 2$, la courbe part de $(2, 0)$ avec une tangente verticale.

