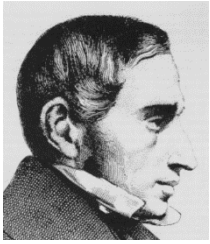
Chapitre 2 **Dérivation**

Fiche 4 : Convexité des fonctions dérivables



Pourquoi ? Qui a eu cette idée ? En 1845, Verhulst définit pour la première fois une courbe avec un point d'inflexion pour décrire l'évolution d'une population. Ces notions notions sont encore très présentes dans l'interprétation et les prévisions des phénomènes d'évolution.

Vocabulaire : Soit f dérivable sur un intervalle I, et f' sa dérivée.
Si f' est également dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I et la fonction f'', dérivée de f', est appelée **dérivée seconde** de f.
De même, on pourrait définir ainsi la dérivée 3ème de f notée $f^{(3)}$, ou la dérivée n-ième de f notée $f^{(n)}$

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Dire que la fonction f est convexe sur I, revient à dire que sa dérivée f' est croissante sur I, soit :
$f''(x) \geq 0$, pour tout x de I.
- Dire que la fonction f est concave sur I, revient à dire que sa dérivée f' est décroissante sur I, soit :
$f''(x) \leq 0$, pour tout x de I.

Démonstration :
- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.
Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I soit $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$. Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.
Donc f est concave sur $]-\infty\,;9]$ et f est convexe sur $[9\,;+\infty[$, le point d'abscisse 9 est un point d'inflexion.

Interprétation : En économie, médecine ou encore en physique, la convexité s'interprète comme une accélération, la concavité comme un ralentissement et l'inflexion comme un changement de tendance.

Chapitre 2 **Dérivation**

Les exercices du livre : Ex 73 p 156, 77, 79, 80 p 157