

# Chapitre 9 Equation Différentielle

## Fiche 2 : Résolution de $y' = f$

### Vocabulaire :

On dit que  $F$  est **une** primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$  si et seulement si pour tout  $x$  on a  $F'(x) = f(x)$

### Exemple :

Soit  $f(x) = (6x + 5)e^{3x}$  et  $F(x) = (2x + 1)e^{3x}$ . Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$ .

→ Cela revient à montrer que  $f$  est la dérivée de  $F$

$$\rightarrow F'(x) = u'v + uv' = 2 \times e^{3x} + (2x + 1) \times 3e^{3x} = (6x + 5)e^{3x} = f(x)$$

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Les solutions de l'équation  $y' = f$  sont les fonctions définies sur  $I$  par  $y(x) = F(x) + c$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  et  $c$  est un réel.

On appelle le nombre  $c$  la constante d'intégration.

Voici le tableau des primitives des fonctions usuelles :

| $f(x)$               | $F(x)$                            |
|----------------------|-----------------------------------|
| $k$ (constante)      | $kx + c$                          |
| $x^n$                | $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$ |
| $\frac{1}{x^n}$      | $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$     |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$                   |
| $e^x$                | $e^x + c$                         |
| $\frac{1}{x}$        | $\ln( x ) + c$                    |

### Primitives déduites des dérivées de fonctions composées :

| $f(x)$                     | $F(x)$                            |
|----------------------------|-----------------------------------|
| $f(ax + b)$                | $\frac{1}{a} F(ax + b)$           |
| $e^{ax+b}$                 | $\frac{1}{a} e^{ax+b}$            |
| $\frac{u'}{u}$             | $\ln( u )$                        |
| $u' \cdot u^n, n \geq 1$   | $\frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} + c$ |
| $\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$ | $\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + c$     |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$      | $2\sqrt{u} + c$                   |

### Exemples :

Si  $y' = x^5$  alors  $F(x) = \frac{x^6}{6} + c$

Si  $y' = \frac{1}{x^4}$  alors  $F(x) = \frac{-1}{3x^3} + c$

Si  $y' = e^{2x-5}$  alors  $F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-5} + c$

Si  $y' = \frac{x}{5x^2+6}$  alors  $F(x) = \frac{1}{10} \ln(|5x^2 + 6|) + c$

**A savoir :** La vitesse de chute d'un corps dans le vide ne dépend pas de son poids. Ainsi, une plume et un kilo de plomb tombent à la même vitesse dans le vide. Toutefois, la résistance de l'air est à prendre en compte sur Terre, et c'est pourquoi la forme de l'objet a une influence.

C'est Galilée qui le premier fit la découverte que la gravité agissait de manière égale sur tous les corps, en lâchant des boules de poids différents en haut de la tour de Pise : il constata qu'elles arrivaient en bas en même temps.

En physique, on modélise le mouvement grâce aux équations différentielles. La fonction distance parcourue  $d(t)$  en fonction du temps  $t$  aura pour dérivée sa fonction vitesse  $v(t)$  et pour dérivées seconde sa fonction accélération  $a(t)$ .

La modélisation d'une chute libre d'un corps de masse  $m$  (en kg) sur Terre sans frottement est  $a(t) = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Le nombre 9,8 correspond à la gravité terrestre.

## Chapitre 9      **Equation Différentielle**

**Exemple** : Si l'on fait tomber une pomme d'un arbre de 10 m de haut sans vitesse initiale, alors  $v(t) = 9,8t + c$  mais  $v(0) = 0$  donc  $v(t) = 9,8t$ .

et de même, on primitive  $d(t) = \frac{9,8t^2}{2}$

Ainsi la pomme sera tombée au temps  $t_0 = \sqrt{\frac{20}{9,8}}$  et sa vitesse lors de l'impact sera  $v(t_0) = 9,8\sqrt{\frac{20}{9,8}}$ .

Pour réviser : Ex 46 et 50 p 218

