

Fiche 3 : Résolution de $y' = ay$ **Vocabulaire :**

L'équation différentielle $y' - ay = 0$ est appelée équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Remarque : On dit aussi « sans second membre » au lieu de « homogène ».

Théorèmes :

Les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.

Pour tous réels x_0 et y_0 , l'équation $y' = ay$ possède une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Propriété :

Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors les fonctions $f + g$ et kf (où k est un réel) sont également solutions de cette solution.

Démonstrations :

- 1) \Leftarrow Soient C un réel et y la fonction définie sur \mathbb{R} par $y(x) = Ce^{ax}$. Alors y est dérivable sur \mathbb{R} (produit d'une constante par la composée d'une fonction affine et d'exponentielle) et $y'(x) = Ca e^{ax} = ay(x)$.
 \Rightarrow Réciproquement, soient y une solution et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = y(x)e^{-ax}$. Alors g est dérivable sur \mathbb{R} (produit d'une fonction dérivable par la composée d'une fonction affine et d'exponentielle) et $g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$.
 Donc g est une fonction constante, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C$ soit $y(x)e^{-ax} = C$ soit $y(x) = Ce^{ax}$.
- 2) Soit y une solution de $y' = ay$, d'après 1), il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ce^{ax}$. Par hypothèse, $y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow Ce^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow C = y_0 e^{-ax_0}$.
 Donc la solution est unique.
- 3) Si les fonctions f et g sont solutions de l'équation $y' = ay$, alors $f' = af$ et $g' = ag$ donc les fonctions $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$ et $(kf)' = kf' = a(kf)$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle : $2y' + 5y = 0$ avec la condition initiale $y(2) = 1$.

On transforme l'équation différentielle pour isoler y' : $y' = -\frac{5}{2}y$

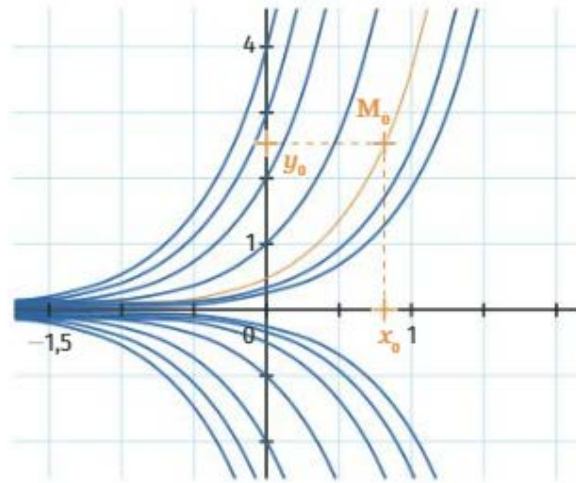
La solution générale de cette équation est $y = Ce^{-\frac{5}{2}x}$ où C est un nombre réel.

Or $y(2) = 1 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{5}{2} \times 2} = 1 \Leftrightarrow C = e^5$

La solution particulière cherchée est $y(x) = \exp(5 - \frac{5}{2}x)$.

EXEMPLE

Les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto Ce^{2x}$, où C est un réel, sont les solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$.
L'allure des courbes représentatives de certaines solutions de (E_0) est donnée ci-contre.



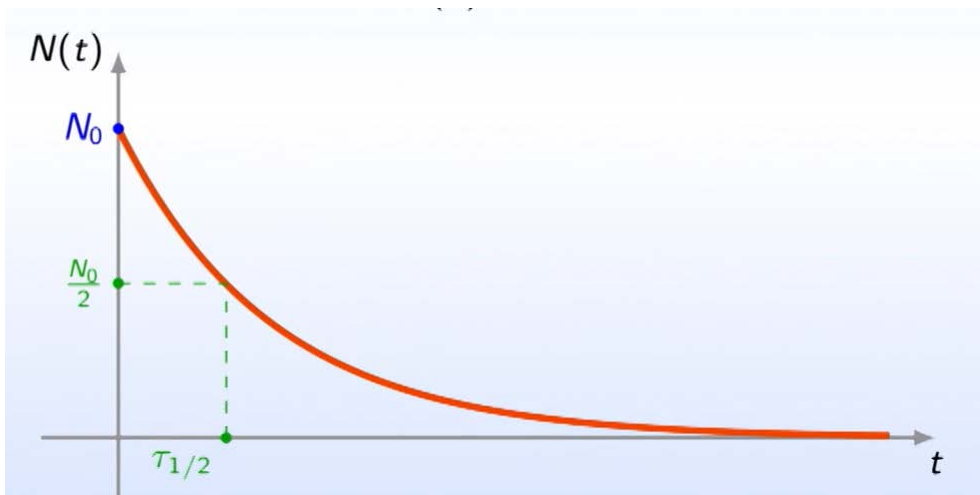
Application physique : La demi-vie

Dans un tissu radioactif, la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ présents dans le tissu à l'instant t .

Il existe donc $\lambda > 0$ telle que : $N'(t) = -\lambda N(t)$

Si N_0 désigne le nombre de noyaux à l'instant initial, on a donc :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$



Pour réviser : Ex 60 et 63 p 220