

Fiche 4 : Résolution de $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$ **Vocabulaire :**

L'équation différentielle $y' = ay + b$ qui peut aussi s'écrire $y' - ay = b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété :

Les solutions de l'équation $y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

Démonstration :

Soit $(E): y' = ay + b$ une équation différentielle avec $a \neq 0$.

- 1) On détermine une solution constante $\varphi: x \mapsto k$ de (E) où k est un réel. Alors $D_\varphi = \mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = 0$. Donc φ est une solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = a\varphi(x) + b \Leftrightarrow 0 = ak + b \Leftrightarrow k = -\frac{b}{a}$ donc $\varphi(x) = -\frac{b}{a}$.
- 2) Soit y une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
Si y est solution de (E) alors $y'(x) = ay(x) + b$
 $(y - \varphi)'(x) = y'(x) - \varphi'(x) = ay(x) + b - 0 = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right) = a(y(x) - \varphi(x))$ donc $y - \varphi$ est solution de $(E_0): y' = ay$.
Réciproquement, si $y - \varphi$ est solution de (E_0) alors $(y - \varphi)' = a(y - \varphi)$
 $\Leftrightarrow y' - \varphi' = ay - a\varphi \Leftrightarrow y'(x) = ay(x) - a \times \left(-\frac{b}{a}\right)$.
Ainsi $y'(x) = ay(x) + b$ donc y est solution de (E) .
- 3) Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies par $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle donc celles de (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel.

Remarque : Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante φ de (E) aux solutions générales de l'équation homogène associée $y' = ay$.

Exemple : Les solutions de l'équation différentielle $y' = 5y - 4$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y(x) = Ce^{5x} + \frac{4}{5}$

Application en physique : Le parachutiste

$$m \frac{dv(t)}{dt} = mg - mf \cdot v(t)$$

Où g est la constante de gravitation, m la masse du parachutiste, f le coefficient de frottement et v la fonction vitesse.

Equation homogène : $v'(t) = -f \cdot v(t)$ Solutions : $v(t) = ke^{-ft}$

Solution particulière : $v_p(t) = \frac{g}{f}$

Solution générale : $v(t) = ke^{-ft} + \frac{g}{f}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Pour réviser : Ex 68 , 69 p 220

