

DM n°1 Arithmétique

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit a et b deux entiers relatifs.
 - a) Développer $(a + b)^3$.
 - b) Démontrer que : $3 \text{ divise } (a + b)^3 \Leftrightarrow 3 \text{ divise } a^3 + b^3$.
2. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x ; y)$ vérifiant $4x^2 - y^2 = 20$.

Exercice 2

1. Trouver tous les entiers naturels n dont le quotient dans la division euclidienne par 5 donne un quotient égal à trois fois le reste.
2. Soit a et b deux entiers relatifs avec $b \leq 20$. Dans la division euclidienne de a par b , le reste est 8 et pour celle de $2a$ par b , le reste est 5. Déterminer b .

Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $2x \equiv 4 \pmod{6}$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers x tels que $x^2 \equiv 2x \pmod{6}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $A_n = 3^{4n+3} + 4^{2n+1}$.

1. Démontrer que $3^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$ et que $4^{2n} \equiv 1 \pmod{5}$.
2. En déduire que 5 divise $A_n - 1$.
3. Justifier que $A_n - 1$ est pair.