# Expert : Devoir Maison n°2

**Exercice 1** *Deux questions indépendantes pour commencer…*

**1.** Soit $x$ un réel. On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} e^x & -1 \\ e^{2x} & -e^x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ 1 & -e^{-x} \end{pmatrix}$.

Déterminer le produit matriciel AB. *Simplifier au maximum*

**2.** Soit $x$ un réel. On considère $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & x \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Soit $y$ un réel. Calculer le produit matriciel $M(x)M(y)$ et montrer qu'il est égal à $M(x+y)$

**b)** En déduire que $M(x)$ est inversible et déterminer la matrice inverse de $M(x)$.

**Exercice 2**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

**1.** **a)** Calculer $A^2 + A - 2I_3$.

**b)** En déduire que la matrice A est inversible puis déterminer la matrice $A^{-1}$.

**2.** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + 4y + 2z = -2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$

Résoudre ce système à l'aide du calcul matriciel.

**Exercice 3**

On considère la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**1.** Déterminer la matrice $J$ telle que $M = 2I_2 + J$.

**2.** Démontrer par un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M^n = 2^n I_2 + n2^{n-1}J$