Chapitre 2 : Exercices Inverse Facile

Exercice 1 :

1. Montrer que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Quelles valeurs faut-il donner aux réels c et d de façon à ce que C et D soient inverses ?

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ d & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, puis $\mathrm{A}^2 - 3\mathrm{A} + 2\mathrm{A}_2$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner son inverse.

Exercice 3 :

On considère deux matrices carrées A et B de même ordre et inversibles.
Montrer que le produit AB est inversible et donner son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

Exercice 4 :

Soit A une matrice carrée telle que $\mathrm{A}^2 = 0$.

1. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer, en revanche, que $\mathrm{I} + \mathrm{A}$ est inversible (I désignant la matrice identité de même ordre que A).

Chapitre 2 : Exercices Inverse Moyen

Exercice 1 :

Soit A une matrice carrée différente de la matrice unité, montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que si A vérifie $A^2 = A$ alors A n'est pas inversible.

Exercice 2 :

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + A$ puis en déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. Soit $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer P^2, QP et PQ en fonction de P. *Constater que* $Q = P + I_3$.

b. Calculer $(4I_3 - P)Q$. En déduire que Q est inversible et déterminer Q^{-1}.

Exercice 3 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer P^2 et vérifier que P est inversible.

2) Vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.

3) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de A^n en fonction de n.