Chapitre 2 : Exercices Puissance Facile

Exercice 1 :

Soient a, b et c trois réels. On considère la matrice $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Déterminer pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de D^n.

Exercice 2 :

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$: $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{I}_2$

2) Calculer B^2

3) En déduire pour tout entier $n \geqslant 0$, l'expression de A^n en fonction de n.

Chapitre 2 : Exercices Puissance Difficile

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 \\ 0,2 & 0,9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer P^2 et vérifier que P est inversible.
2) Vérifier que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.
3) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 2 :

On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2, A^3, et A^4.
2) Conjecturer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non nul.
3) Démontrer votre conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Exercice 3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1.a) Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.
1.b) Démontrer que pour tout entier n avec $n \geqslant 3$, on a : $J^n = 0_3$.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$A^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

3) En déduire la matrice A^n en fonction de n pour tout entier $n \geqslant 1$.