

Exercice 1 :

1. Pourquoi existe-t-il 2 entiers relatifs u et v tels que $626u + 236v = 2$?
Déterminer u et v à l'aide de l'**algorithme d'Euclide**.
2. A l'aide de votre **calculatrice**, déterminer 2 entiers relatifs u et v tels que $39u + 28v = 1$.
Que peut-on en déduire concernant 39 et 28.
3. Déterminer tous les entiers x et y tels que $x \leq y$, $PGCD(x; y) = 14$ et $x + y = 168$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'équation (E_1) $28x = 9y$
2. Résoudre l'équation (E_2) $28x - 9y = 4$
3. Résoudre l'équation (E_3) $28x - 6y = 4$
4. Résoudre l'équation (E_4) $28x - 6y = 5$
5. Un confiseur a fabriqué 950 bonbons. Il possède des boîtes de type A et B. Une boîte de type A peut contenir 55 bonbons. Une boîte de type B peut contenir 65 bonbons.
Il remplit parfaitement chacune des boîtes et range ainsi tous ses bonbons.
Soit x le nombre de boîtes A et y le nombre de boîtes B.
Combien y a-t-il de couples $(x; y)$ possibles?
Donner les tous.

Correction :

Exercice 1 :

- 1) On détermine le $\text{pgcd}(626, 236)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

$$626 = 236 \times 2 + 154$$

$$236 = 154 \times 1 + 82$$

$$154 = 82 \times 1 + 72$$

$$82 = 72 \times 1 + 10$$

$$72 = 10 \times 7 + 2$$

$$10 = 2 \times 5 + 0$$

Le pgcd est le dernier reste non nul donc $\text{pgcd}(626, 236) = 2$ par le théorème de Bézout il existe des solutions entières à l'équation $626x + 236y = 2$.

On remonte alors l'algorithme d'Euclide :

$$2 = 72 - 10 \times 7$$

$$= 72 - (82 - 72) \times 7$$

$$= 72 \times 8 - 82 \times 7$$

$$= (154 - 82) \times 8 - 82 \times 7$$

$$= 154 \times 8 - 82 \times 15$$

$$= 154 \times 8 - (236 - 154) \times 15$$

$$= 154 \times 23 - 236 \times 15$$

$$= (626 - 236 \times 2) \times 23 - 236 \times 15$$

$$= 626 \times 23 - 236 \times 38$$

Une solution de l'équation est donc (23, -38) (on vérifie bien le résultat à la calculatrice).

- 2) On isole une des deux lettres et on utilise le tableur de la calculatrice pour trouver un couple de solutions entière.
- 3) $x = 14k$ et $y = 14k'$ avec k et k' des entiers (positifs ?) premiers entre eux

$$\text{Ainsi } x + y = 168 \Leftrightarrow k + k' = 12$$

$$\text{Si on ajoute que } 0 \leq x \leq y \text{ alors } 0 \leq k \leq k'$$

Les solutions possibles pour (k, k') sont (1 ; 11) et (5 ; 7) donc pour (x ; y), $S = \{(14, 154), (70, 98)\}$

Exercice 2 :

- 1) $28 = 2^2 \times 7$ et $9 = 3^2$ donc $\text{pgcd}(28, 9) = 1$.

Par le théorème de Gauss, 9 divise x donc il existe un entier relatif k tel que $x = 9k$ donc en remplaçant x dans l'équation : $28 \times 9k = 9y$ donc $y = 28k$.

$$S = \{(9k, 28k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- 2) $\text{pgcd}(28, -9) = 1$ par l'identité de Bézout, il y a une infinité de solutions entières à l'équation E_2 .

$$1 = 28 - 9 \times 3 \text{ donc } (1, 3) \text{ est solution particulière de } 28x - 9y = 1.$$

Pour trouver une solution particulière de E_2 on multiplie tout par 4 :

$$(4, 12) \text{ est solution particulière de } 28x - 9y = 4.$$

$$\text{Cherchons la solution générale : } 28x - 9y = 28 \times 4 - 9 \times 12$$

$$28(x - 4) = 9(y - 12)$$

Comme $\text{pgcd}(28, 9) = 1$ par le théorème de Gauss, 9 divise $(x - 4)$ donc il existe un entier relatif k tel que $x - 4 = 9k$ donc en remplaçant $(x - 4)$ dans l'équation : $28 \times (9k) = 9(y - 12)$

$$\text{donc } y = 12 + 28k.$$

$$S_{E_2} = \{(4 + 9k, 12 + 28k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

- 3) $\text{pgcd}(28; 6) = 2$ et que 2 divise 4 par le corollaire du théorème de Bézout, il y a une infinité de solutions entières à l'équation $E_3 : 14x - 3y = 2$.
 $1 = 14 \times 2 - 3 \times 9$ donc $(2; 9)$ est solution particulière de $14x - 3y = 1$.
 Pour trouver une solution particulière de E_3 on multiplie tout par 2 :
 $(4; 18)$ est une solution particulière de $14x - 3y = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Cherchons la solution générale : } 14x - 3y &= 14 \times 4 - 3 \times 18 \\ 14(x - 4) &= 3(-18 + y) \end{aligned}$$

Comme $\text{pgcd}(14, 3) = 1$ par le théorème de Gauss, 3 divise $(x - 4)$ donc il existe un entier relatif k tel que $x - 4 = 3k$ donc en remplaçant $(x - 4)$ dans l'équation : $14 \times (3k) = 3(-18 + y)$

$$\text{donc } y = 18 + 14k.$$

$$S_{E_3} = \{(4 + 3k, 18 + 14k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

On vérifie la solution : $28 \times (4 + 3k) - 6 \times (18 + 14k) = 4$

- 4) $\text{pgcd}(28; 6) = 2$ et que 2 ne divise pas 5 par le corollaire du théorème de Bézout, il n'y a pas de solutions entières à l'équation E_4 .
 5) Le problème revient à l'équation $55x + 65y = 950$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
 $\text{pgcd}(55, 65) = 5$ et 5 divise 950 par le corollaire du théorème de Bézout, il y a une infinité de solutions entières à l'équation $E_5 : 11x + 13y = 190$. (on a divisé les coefficients par 5)
 $1 = 11 \times 6 - 13 \times 5$ donc $(6; -5)$ est une solution particulière de $11x + 13y = 1$.
 donc $(1140; -950)$ est une solution particulière de $11x + 13y = 190$.

$$\begin{aligned} \text{Cherchons la solution générale de } E_5 : 11x + 13y &= 11 \times 1140 - 13 \times 950 \\ 11(x - 1140) &= 13(-950 - y) \end{aligned}$$

Comme $\text{pgcd}(11, 13) = 1$ par le théorème de Gauss, 13 divise $(x - 1140)$ donc il existe un entier relatif k tel que $x - 1140 = 13k$ donc en remplaçant $(x - 1140)$ dans l'équation : $11 \times (13k) = 13(-950 - y)$

$$\text{donc } y = -950 - 11k.$$

$$S_{E_5} = \{(1140 + 13k, -950 - 11k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

On vérifie que les solutions trouvées fonctionnent bien :

$$(1140 + 13k) \times 55 + (-950 - 11k) \times 65 = 950$$

De plus nos solutions doivent être positives donc $1140 + 13k > 0$ et $-950 - 11k > 0$

Donc $k > -87, \dots$ et $k < -86, \dots$ donc $k = -87$.

Il y a donc une seule possibilité $x = 1140 + 13 \times -87 = 9, y = -950 - 11 \times -87 = 7$