

1 Introduction

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f **qui est proportionnelle** à sa dérivée f' .

Par exemple, le phénomène de désintégration des noyaux radioactifs, l'activité de désintégration à l'instant t est proportionnelle au nombre de noyaux à l'instant t : $N'(t) = kN(t)$

Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.

Plus particulièrement, que peut-on dire d'une **fonction qui serait égale à sa dérivée** ?

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée :

Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

2 Théorie : de l'importance de la condition initiale

Supposons qu'il existe une fonction f , non nulle, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ sur $\mathbb{R}$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$.

Démontrer que : $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g une fonction vérifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de : $f + g$?

3) Supposons maintenant qu'il existe une fonction f , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions :

$$(P) \quad \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

a) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x)f(-x)$$

Montrer que φ est une fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ puis que la fonction f est strictement positive.

b) Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$ sur $\mathbb{R}$.

On pourra considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{f}{g}$.

Dans la suite, la fonction f est l'unique fonction satisfaisant les conditions : (l'unicité vient d'être montrée, l'existence sera montrée plus tard)

$$(P) \quad \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Nous allons maintenant essayer de tracer la représentation graphique de f grâce à la **méthode d'Euler**.

3 Methode d'Euler, représentation graphique

14A

- 1) Expliquer pourquoi si f est une fonction derivable en a , alors il existe une fonction ϵ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

D'où l'approximation :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Remarque : C'est sur cette approximation (dite "affine") qu'est basée la méthode d'Euler.

- 2) En utilisant les conditions satisfaites par f , conjecturer sur les premiers $n \in \mathbb{N}^*$ que l'on a :

$$f(a+nh) \simeq (1+h)^n f(a)$$

- 3) Dans cette question, on suppose $a = 0$. On a donc : $f(nh) \simeq (1+h)^n$

- a) On pose $x = nh$. Démontrer que pour n assez grand, on a :

$$f(x) \simeq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Remarque : : cette approximation est d'autant meilleure que n est grand.

- b) A l'aide de la calculatrice, tracer les courbes des approximations de la fonction f pour des valeurs de n egales à 10, 100, et 1 000.

$$\begin{cases} X_{\text{Min}} = -2,3 \\ X_{\text{Max}} = 4,3 \\ \text{Scale} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_{\text{Min}} = -4 \\ Y_{\text{Max}} = 54 \\ \text{Scale} = 5 \end{cases}$$

- c) En prenant $n = 10\,000$, donner une valeur approchée du nombre $f(1) \simeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Remarque : : le nombre $f(1)$ est encore note e .

Cette fonction f vérifiant les conditions $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est appelée **fonction exponentielle**.

- 4) On vient de voir à quoi ressemble sa représentation graphique. Cette fonction possède des propriétés remarquables notamment celle de transformer des "sommes" en "produits", c'est-à-dire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x)f(y)$

y étant fixé, $y \in \mathbb{R}$, on pose la fonction g_y définie par : $g_y(x) = f(x+y)f(-x)$

Montrer que g_y est une fonction constante (égale à $f(y)$) sur $\mathbb{R}$ puis conclure.