

COMPLEXES
GEOMETRIE

I. Module et argument d'un nombre complexe

1) Représentation dans la plan complexe

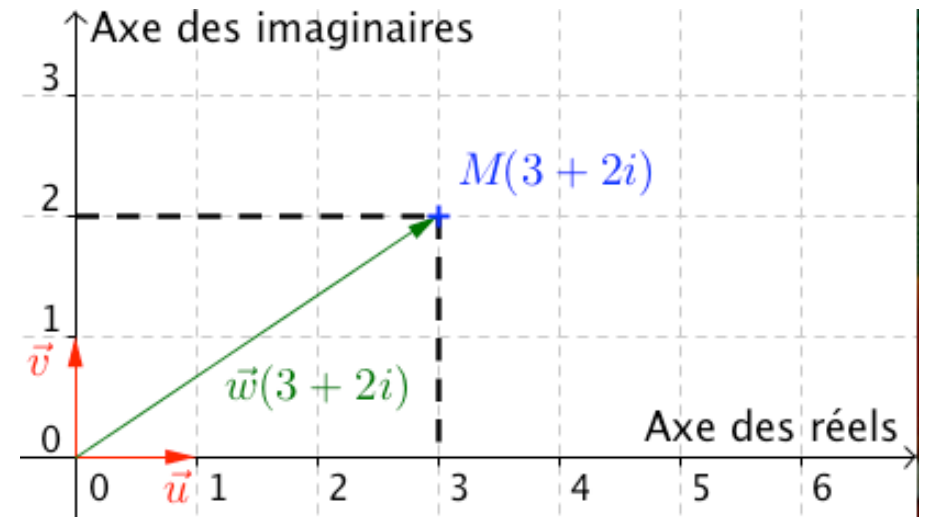
Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Définitions : a et b sont deux nombres réels.

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M de coordonnées $(a ; b)$ et le vecteur \vec{w} de coordonnées $(a ; b)$.
 - A tout point $M(a ; b)$ et à tout vecteur $\vec{w}(a ; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affiche du point M et affiche du vecteur \vec{w} .
- On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple : Le point $M(3 ; 2)$ a pour affiche le nombre complexe $z = 3 + 2i$.

De même, le vecteur \vec{w} a pour affiche $z = 3 + 2i$.



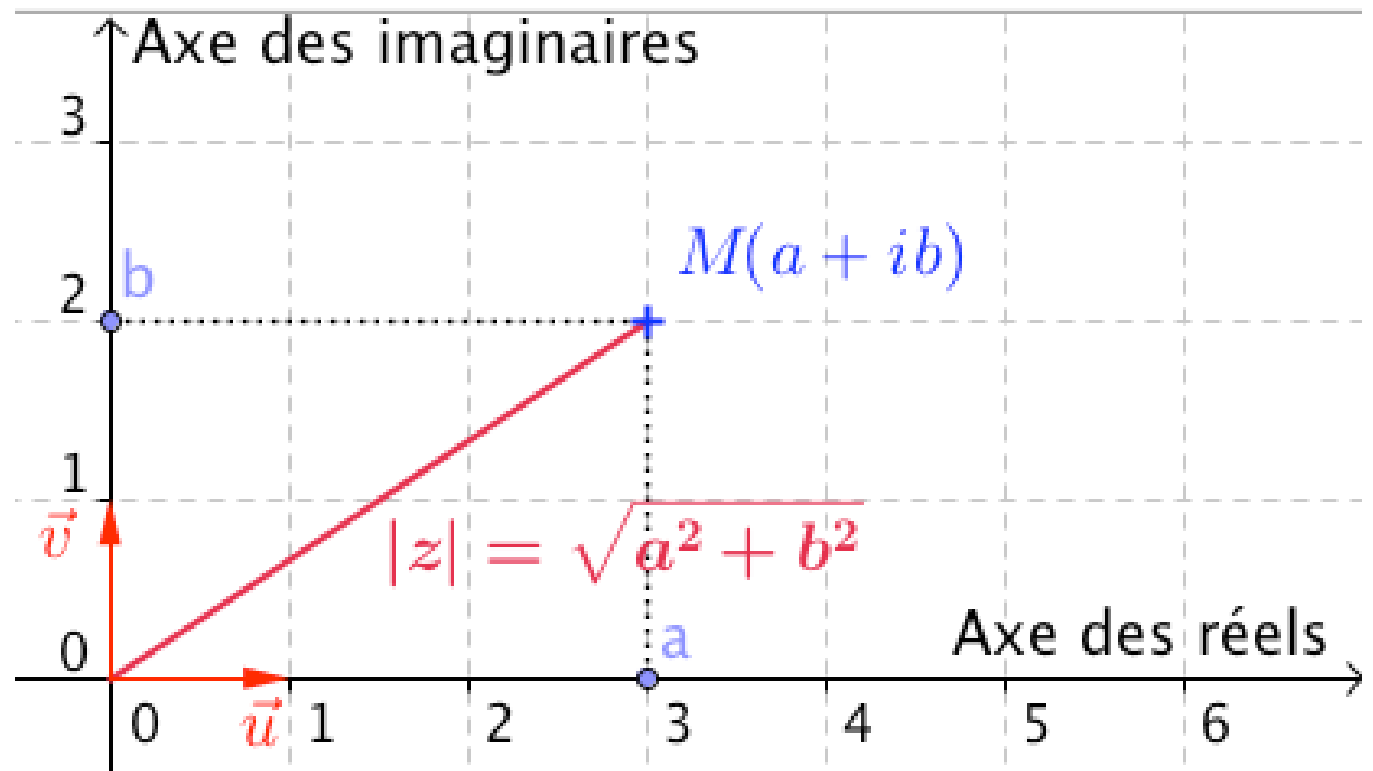
2) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.

On appelle module de z , le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z .

Alors le module de z est égal à la distance OM.



3) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.

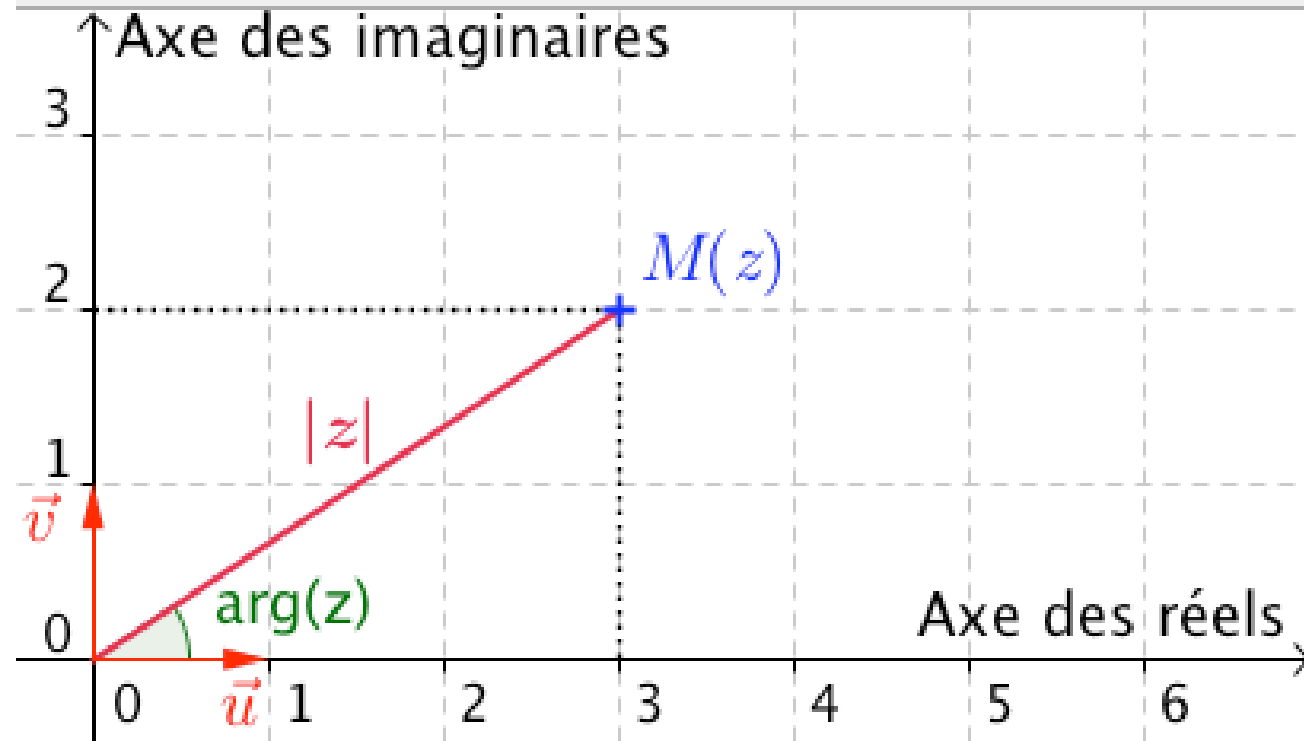
On appelle argument de z , notée $\arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ où \vec{u} est le vecteur unité de l'axe des abscisses.

Remarques :

- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z) [2\pi]$

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.



Exemple :

Soit $z = 3 + 3i$.

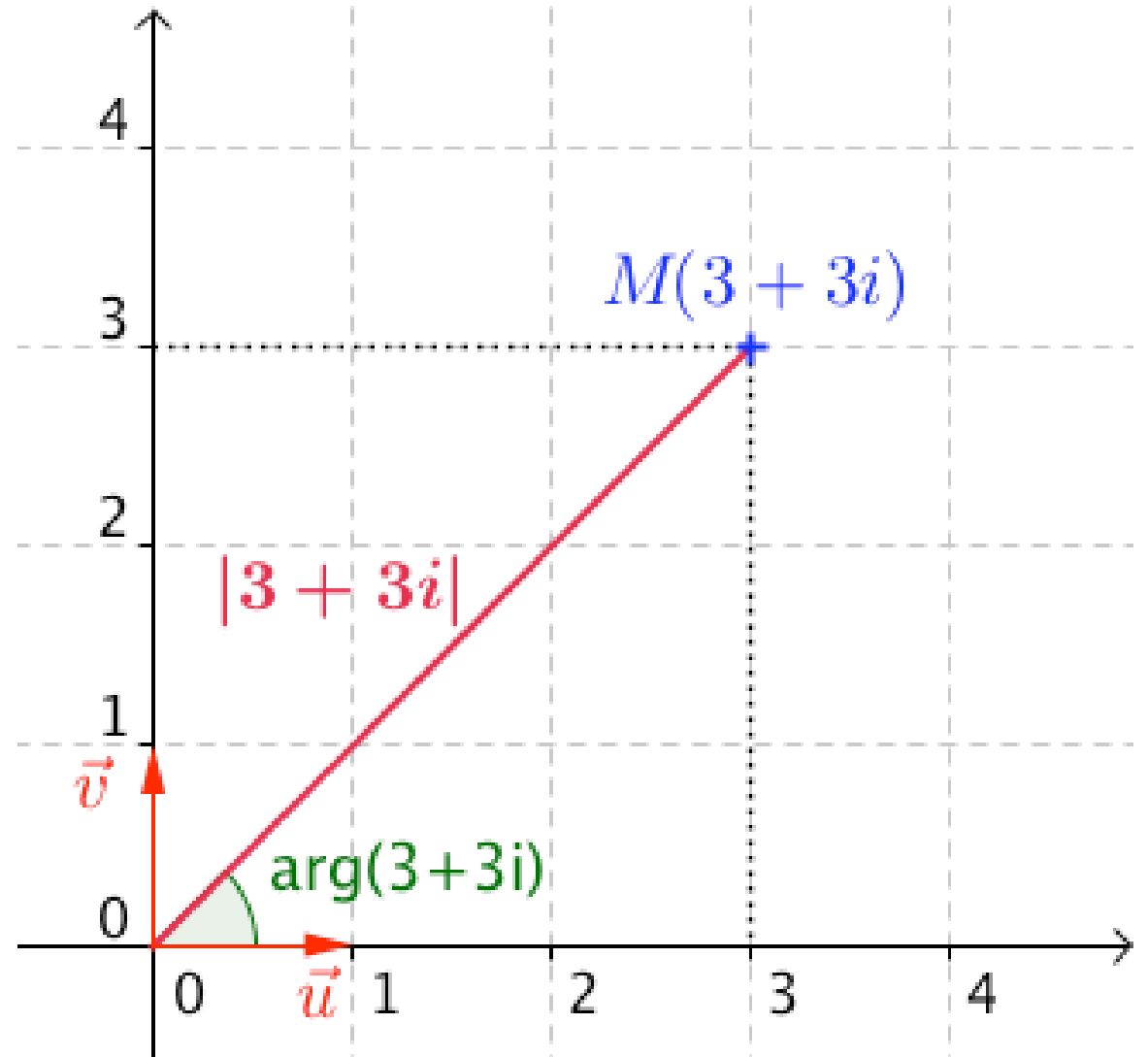
Alors

$$\begin{aligned}|z| &= |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On calcule } \frac{z}{|z|} &= \frac{3+3i}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

On retrouve les valeurs du cosinus
et du sinus de l'angle $\frac{\pi}{4}$.

Donc $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.



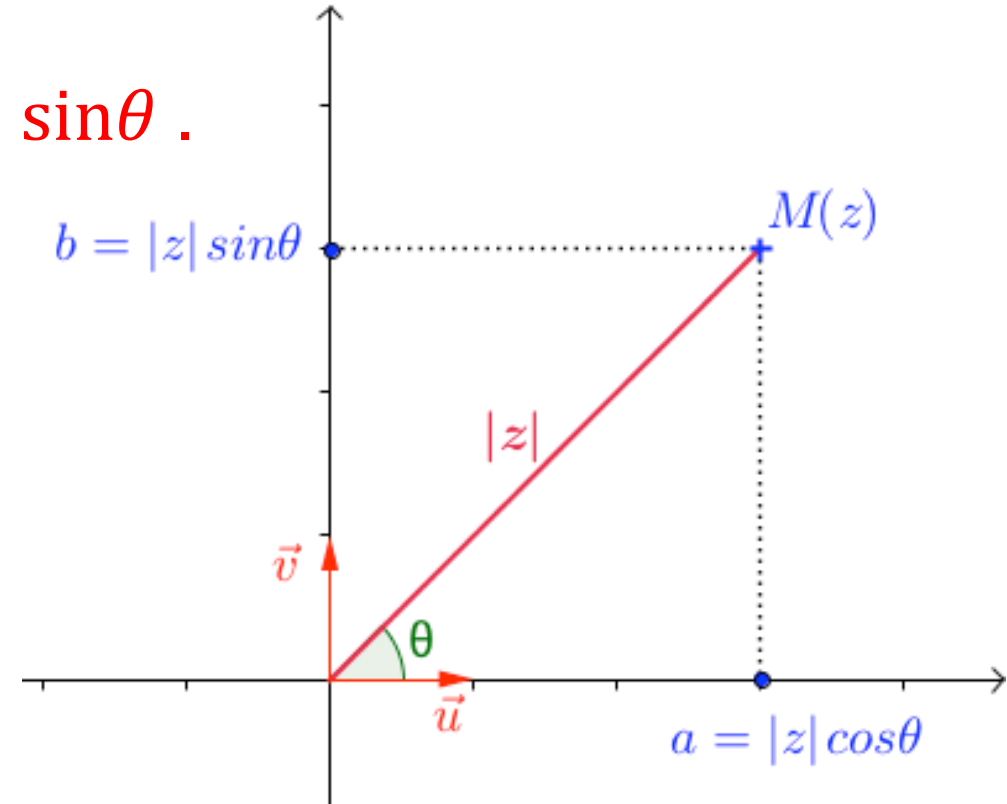
II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.

On pose : $\theta = \arg(z)$

On a alors : $a = |z| \cos\theta$ et $b = |z| \sin\theta$.



Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Méthode : Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique
Ecrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

- On commence par calculer le module de z :

$$|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et

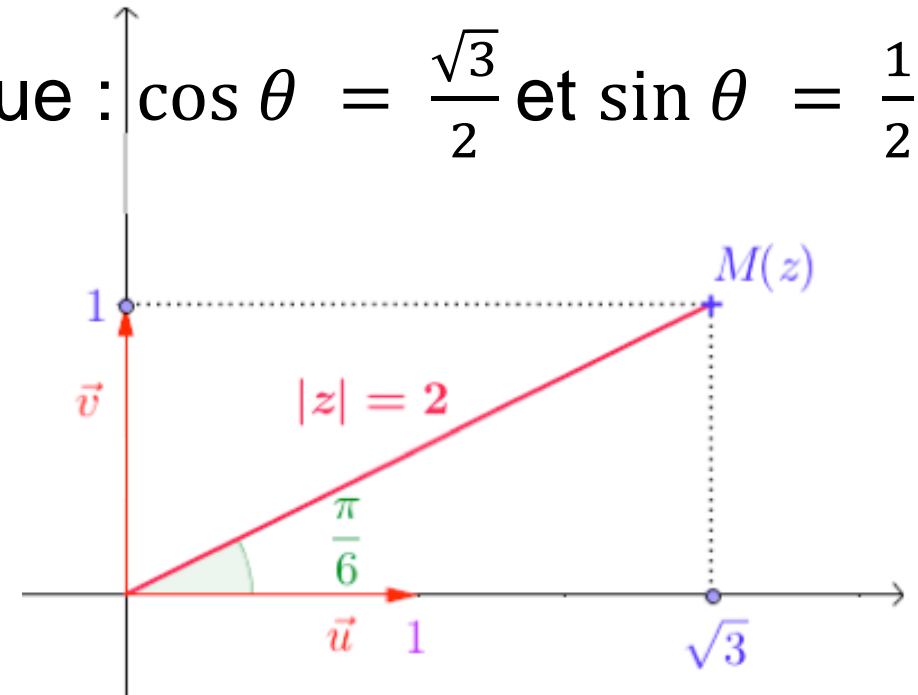
sa partie imaginaire : $\frac{z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

On cherche donc un argument θ de z tel que : $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc : } z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$\text{avec } \arg(z) = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

$ \sqrt{3} + i $	2
$\text{angle}(\sqrt{3} + i)$	$\frac{\pi}{6}$

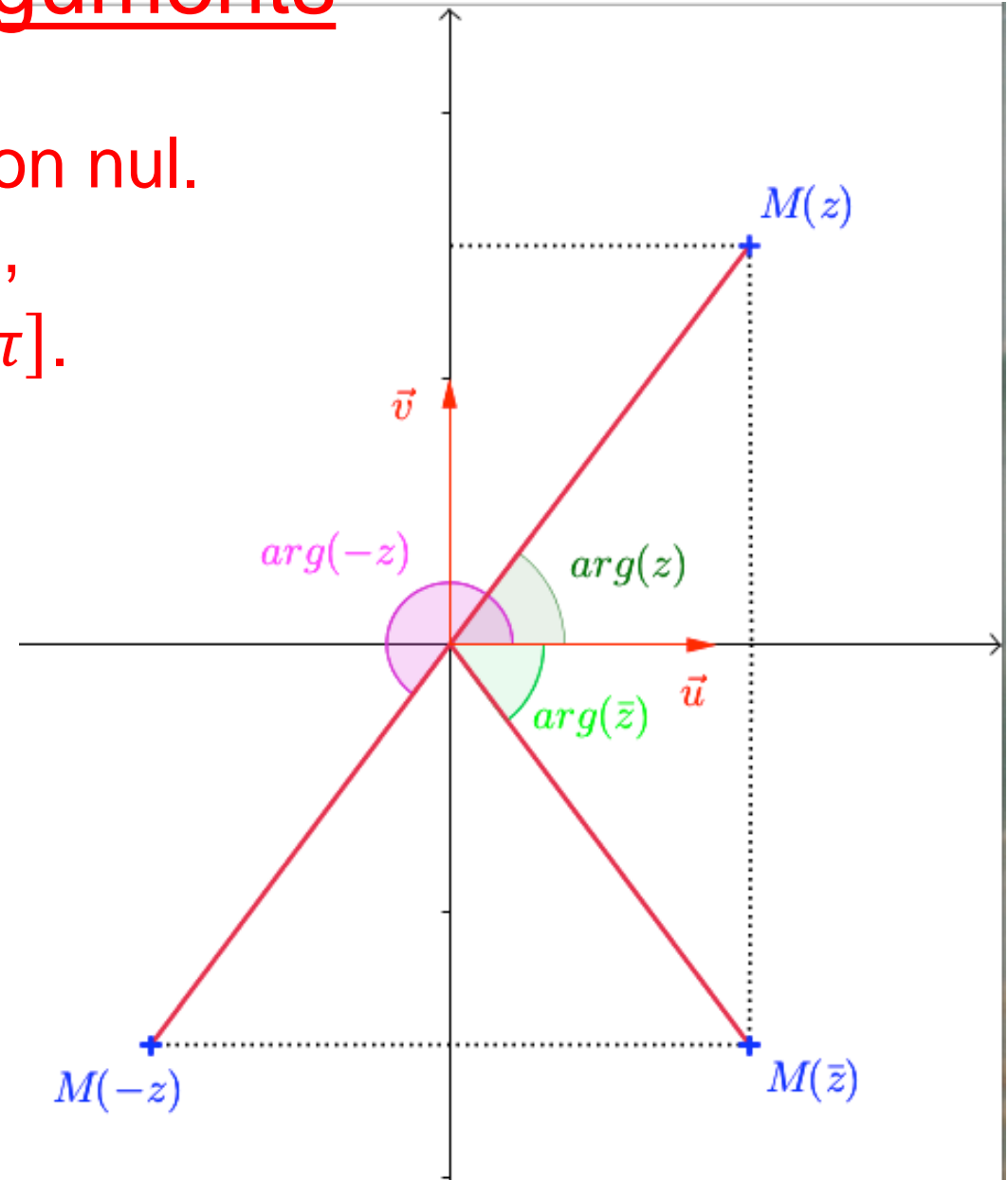


III. Propriétés des modules et arguments

1) Valeurs remarquables de arg

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.

- z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0 [\pi]$,
- z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi]$.
- $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$



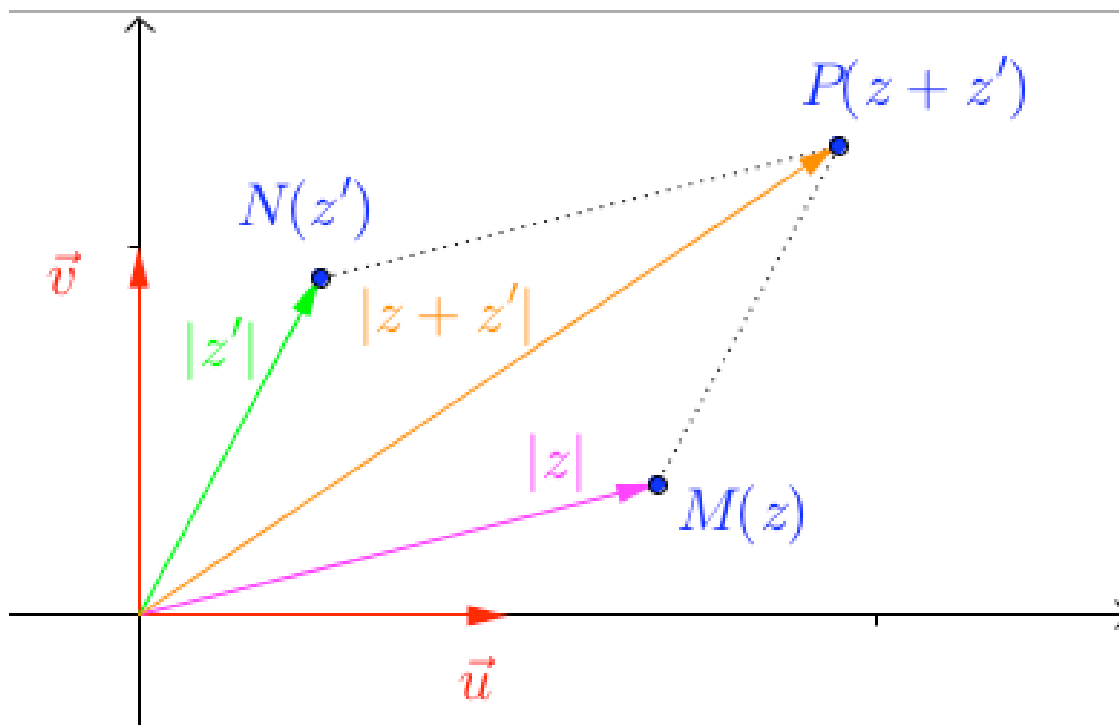
2) Inégalité triangulaire :

Soit z et z' deux nombres complexes.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration :

Il s'agit d'une traduction de l'inégalité sur les distances.



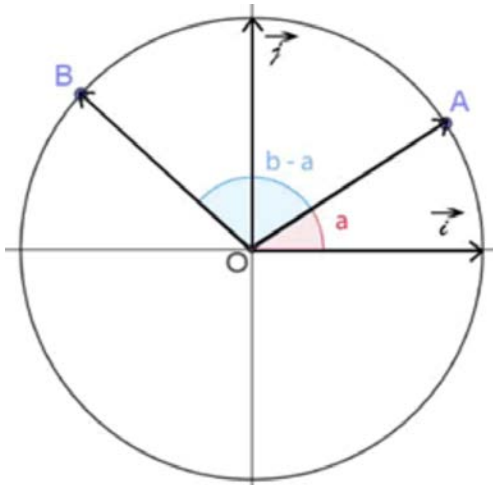
3) Formules de d'addition et de duplication

$$\cos(a + b)$$

$$\sin(a + b)$$

$$\cos(a - b)$$

$$\sin(a - b)$$



Calculons de deux manières le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$

4) Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.

Produit		
Puissance		
Inverse		
Quotient		

Démonstration pour le produit : On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

$$zz' = |z| (\cos\theta + i \sin\theta) |z'| (\cos\theta' + i \sin\theta')$$

$$= |z||z'| (\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' + i (\sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta'))$$

$$= |z||z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$ et un argument de zz' est $\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Définition : Pour tout réel θ , on a : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Remarque : $e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration : $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \times 0 = -1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre e), l'algèbre (avec le nombre i) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples : $e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$.

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ' , pour tout entier naturel n non nul,

$$a) e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$d) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

Remarque : La formule b) s'appelle formule de *Moivre*.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

1) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

$$a) z_1 = -2i$$

$$b) z_2 = -5$$

2) Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$$a) z_3 = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$b) z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

V. Applications à la géométrie

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Propriété : A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On a :

$$a) (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

$$b) AB = |z_B - z_A|$$

$$c) (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Démonstrations :

a) On considère un point E tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.

Alors E a pour affixe $z_B - z_A$.

Donc $(\vec{u}; \overrightarrow{OE}) = \arg(z_B - z_A)$

et donc $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

$$\text{b) } |z_B - z_A| = |z_E| = OE$$

Comme $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$, $OE = AB$ donc $|z_B - z_A| = AB$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \\ &= -(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + (\vec{u}; \overrightarrow{CD}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \end{aligned}$$

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$,
 $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.

- 1) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.
- 2) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
- 4) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (π).

