CHAINE DE MARKOV

Chapitre 8

I. Graphes pondérés

1) Définitions :

- Un graphe est dit **pondéré** si ses arêtes (ou ses arcs) sont affectés d'un nombre positif : les **poids** entre les sommets.
- Le **poids** du chaîne (respectivement d'un chemin) est la somme des poids des arêtes (respectivement des arcs) constituant la chaîne (respectivement le chemin).

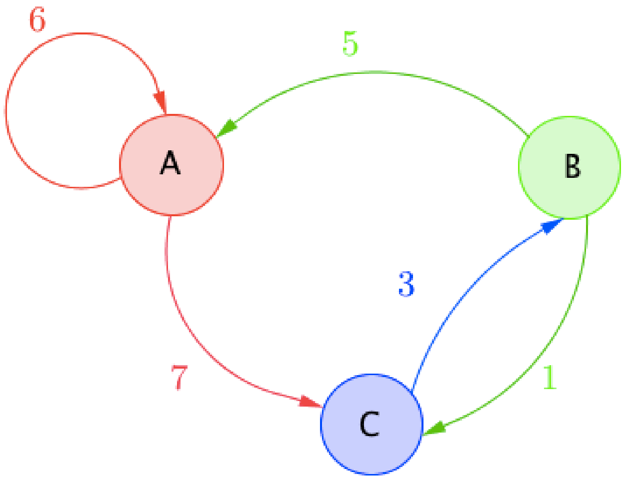
Exemple :

Le graphe orienté ci-contre est pondéré.

Le poids entre le sommet B et le sommet A est égal à 5.

Le poids du chemin B – C – B – A est égal à :

1 + 3 + 5 = 9

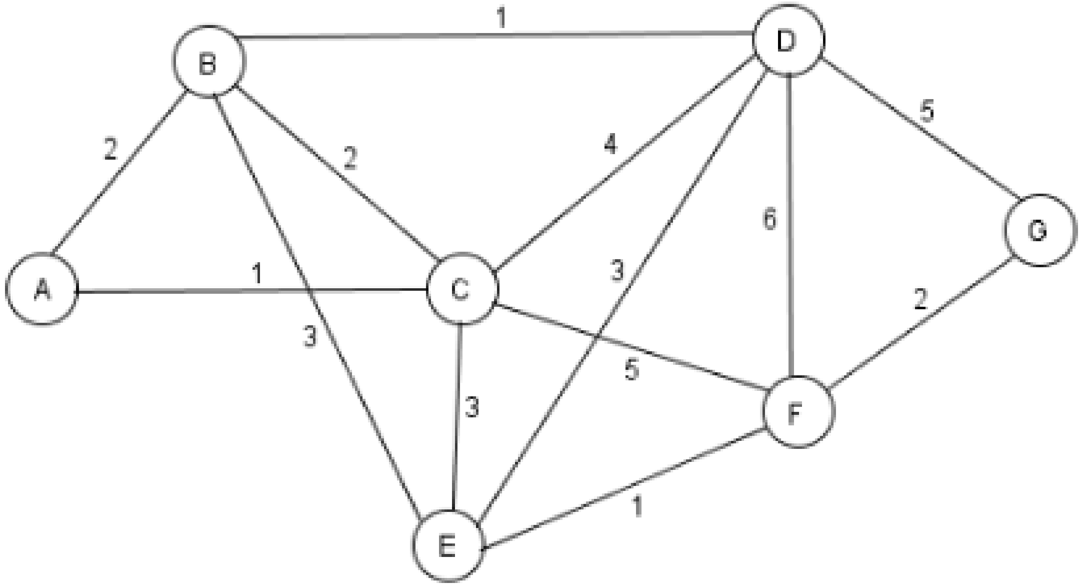


Remarque :

Le chemin le plus court entre deux sommets est le chemin qui a le poids minimum.

Algorithme du plus court chemin entre deux sommets : **Algorithme de Dijkstra**

Sur un exemple : Quel est le plus court chemin pour aller de A à G ?

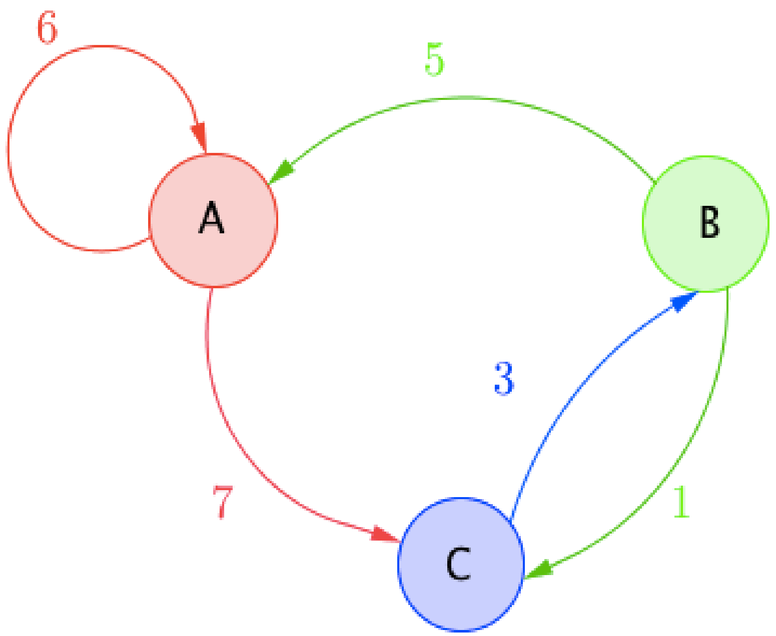


2) Matrice d’adjacence associée :

La **matrice d'adjacence** associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est égal au poids de l’arête (ou de l’arc) reliant le sommet i et le sommet j.

Exemple :

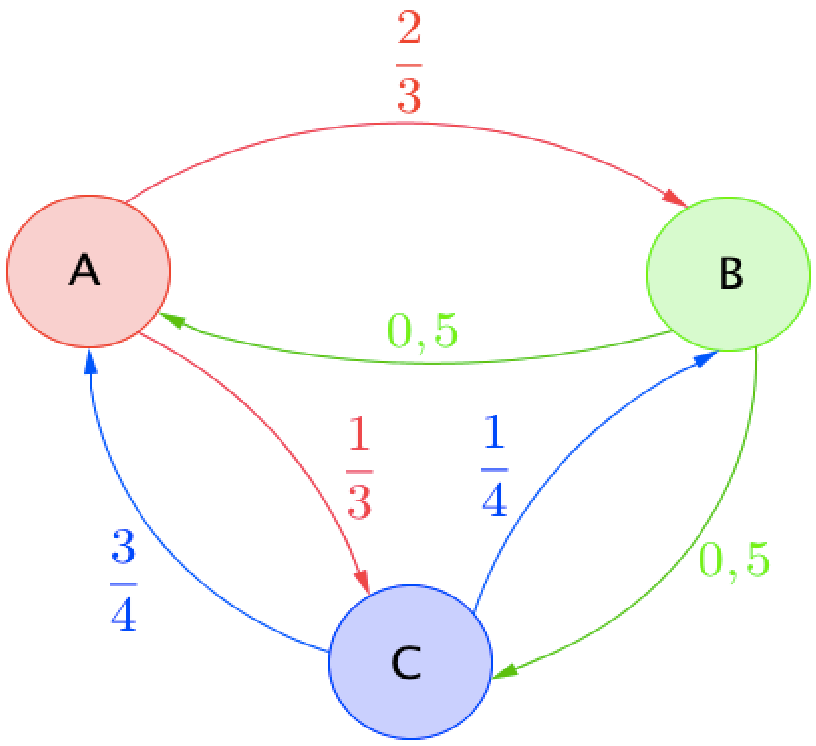
Le matrice d’adjacence associée au graphe est :



II. Chaîne de Markov

1) Définition : Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré possédant au plus un arc entre deux sommets et dont la somme des poids des arcs issus d'un même sommet est égale à 1.

Par exemple, la somme des poids issus de A est égal à $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3} = 1$



3) Marche aléatoire

Soit la variable aléatoire X_n prenant les valeurs A, B ou C à l'étape n.

A, B ou C s'appelle les **états** de X_n.

La suite de variables aléatoires (X_n) est appelée **marche aléatoire** ou **chaîne de Markov** sur l'ensemble des issues $\{A\,;B\,;C\}$.

Dans une chaîne de Markov, l'état du processus à l'étape $n+1$ ne dépend que de celui à l'état n, mais non de ses états antérieurs.

4) Probabilité de transition

La loi de probabilité de X_n, appelée **probabilité de transition**, donne la probabilité à l'étape n.

On note par exemple $P_{X_n=A}(X_{n+1}=C)=\dfrac{1}{3}$. Il s'agit d'une probabilité

conditionnelle. Cette probabilité ne dépend pas de n.

Définition : L'**état probabiliste après $\boldsymbol{n}$ étapes** noté π_n de la chaîne de Markov est la matrice **ligne** dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

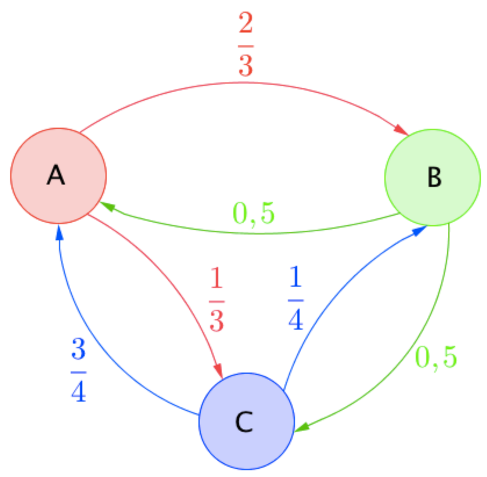
Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est π_n.

Pour tout entier naturel n, on a : $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ et $\pi_n = \pi_0 \times P^n$ où π_0 est l'état initial.

Dans l'exemple précédent, on suppose que $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (par exemple une particule, un ballon part de A).

La matrice ligne des états après la 3e étape est égale à : $\pi_3 = \pi_0 \times P^3$

Avec la calculatrice, on obtient :



$$\pi_3 = \pi_0 \times P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} & \frac{17}{36} & \frac{17}{72} \end{pmatrix}$$

Ainsi par exemple, la probabilité que l'attaquant C possède le ballon après la 3e passe est égale à $\frac{17}{72} \approx 0{,}24$.

5) Chaîne de Markov convergente

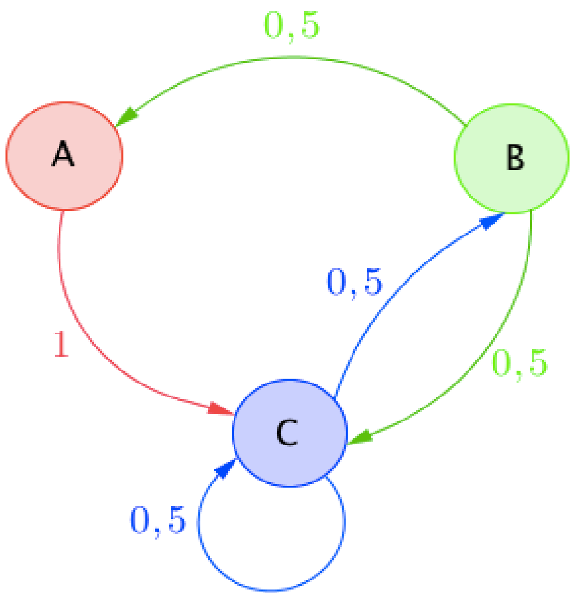
Définition : On dit qu'une **chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente** si la suite des matrices lignes π_n des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite π_n des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un **état stable** solution de l'équation $\pi = \pi P$.

Méthode : Étudier une distribution invariante d'une chaîne de Markov à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel

On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-contre où l'on part de A.

A l'aide de la calculatrice, déterminer l'état stable de cette chaîne de Markov. On admet que la chaîne de Markov est convergente (distribution invariante).



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$$

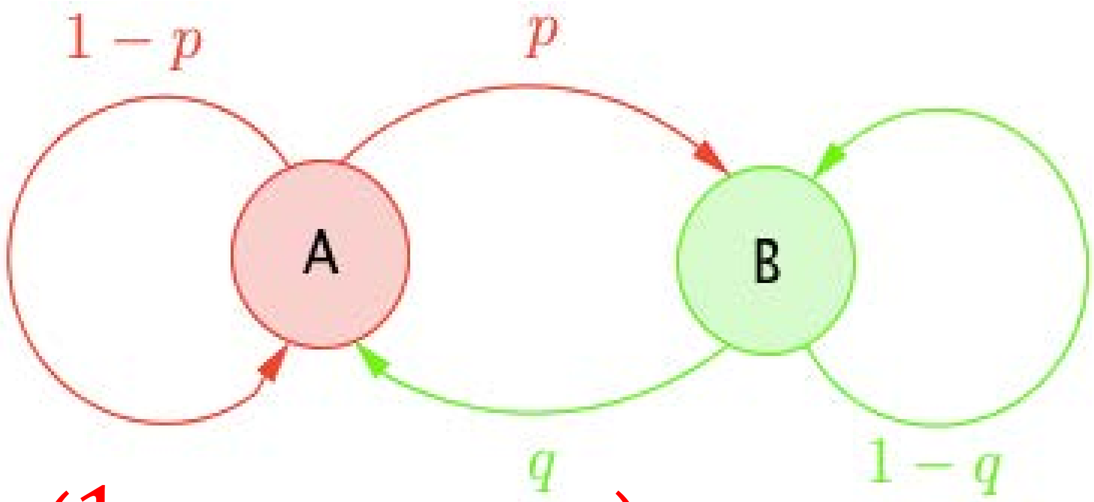
<u>Remarque :</u>

Cette méthode ne prouve pas que la chaîne de Markov est convergente.

En supposant qu'elle l'est, elle permet seulement de déterminer l'état stable.

Cas d'un graphe à deux sommets

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un graphe à deux sommets où $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$.



Alors on a : $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Et la suite des matrices lignes π_n des états de la chaîne de Markov converge vers un état stable π tel que $\pi = \pi P$.

π ne dépend pas de l'état initial π_0.

<u>Démonstration :</u> Pour tout entier naturel n, on note $\pi_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ avec $p_n + q_n = 1$.

Comme $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$, on a :

$$p_{n+1} = p_n(1-p) + q_n \times q = p_n(1-p) + (1-p_n) \times q = p_n(1-p-q) + q$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = p_n - \frac{q}{p+q}$ et on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{q}{p+q} = p_n(1-p-q) + q - \frac{q}{p+q}$$

$$= p_n(1-p-q) - \frac{q(1-p-q)}{p+q} = (1-p-q)\left(p_n - \frac{q}{p+q}\right)$$

$$= (1-p-q)u_n$$

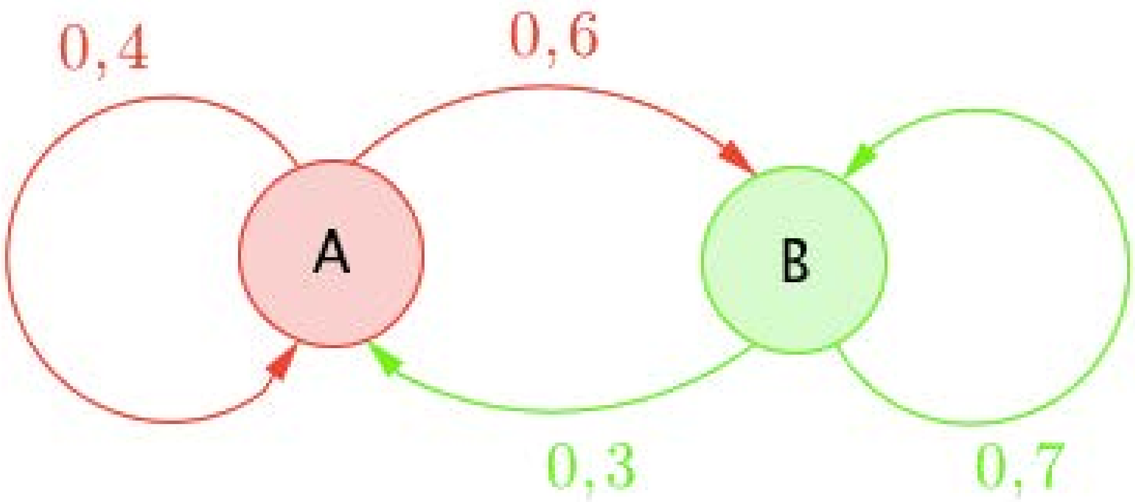
(u_n) est donc une suite géométrique de raison $1-p-q$.

Comme $0 < p+q < 2$, on a $|1-p-q| < 1$ et donc (u_n) converge vers 0.

D'où (p_n) converge vers $\frac{q}{p+q}$. Comme $q_n = 1 - p_n$, (q_n) converge vers $\frac{p}{p+q}$.

Les limites de (p_n) et (q_n) ne dépendent donc pas de l'état initial.

Exemple : On considère la chaîne de Markov sur le graphe ci-dessous :



Étudier la convergence de la chaîne de Markov.