

COMPLEXE ET TRANSFORMATION

Chapitre 9

Rappels

Pour un même nombre complexe z , on peut l'écrire de trois manières différentes :

- **Forme algébrique**

$$z = a + ib$$

- **Forme trigonométrique**

$$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \theta = \arg(z)$$

- **Forme exponentielle**

$$z = |z|e^{i\theta}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Propriété : A, B, C et D sont quatre points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On a :

$$a) (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

$$b) AB = |z_B - z_A|$$

$$c) (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Ensemble de points :

Si M est un point d'affixe z et A un point d'affixe a alors $|z-a|$ s'interprète géométriquement comme la distance AM.

L'ensemble des points du plan tels que $AM=BM$ est la médiatrice du segment [AB].

L'ensemble des points du plan tels que $AM=r$ est : le point A si $r=0$

le cercle de centre A et de rayon r si $r>0$

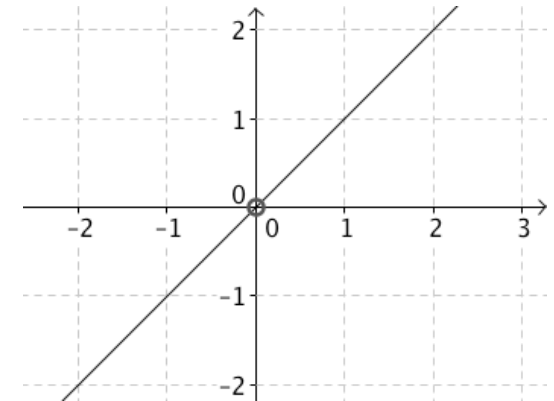
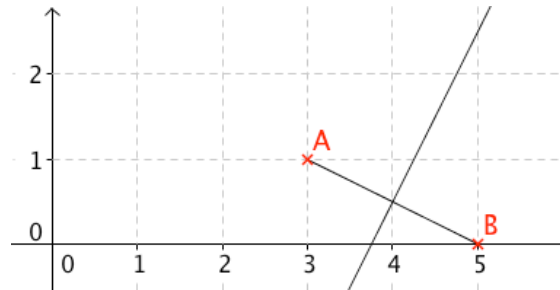
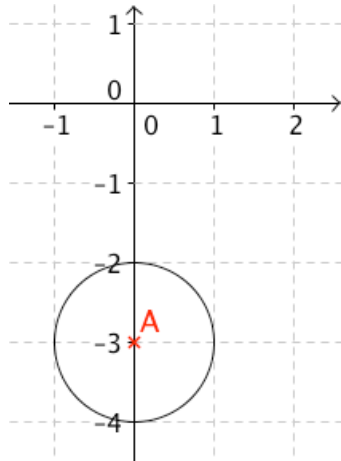
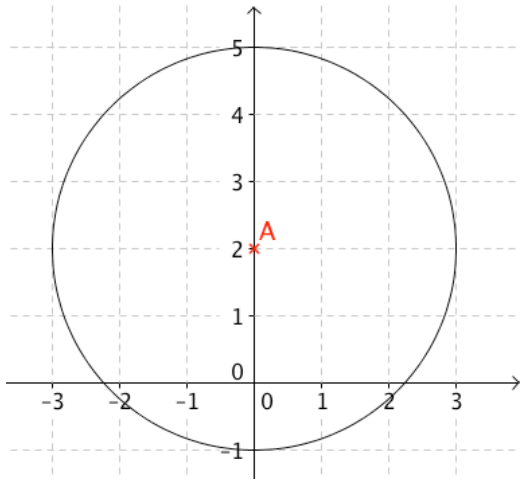
l'ensemble vide si $r<0$

L'ensemble des points du plan tels que $\arg(z)=\theta$ est la demi-droite ouverte telle que $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \theta$.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

Soit M un point d'affixe z . Dans chaque cas, déterminer et représenter :

- 1) L'ensemble des points M tels que $|z - 2i| = 3$.
- 2) L'ensemble des points M tels que $|iz - 3| = 1$.
- 3) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$.
- 4) L'ensemble des points M tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ (π).



I. Transformation du plan complexe

Soit $M(z)$ un point du plan, alors on appelle transformation la fonction f qui associe $M(z)$ à son point image $M(z')$.

Translation :

PROPRIÉTÉ 1 — Soit \vec{v} un vecteur du plan complexe, d'affixe $z_{\vec{v}}$. L'écriture complexe de la translation de vecteur \vec{v} est :

$$z' = z + z_{\vec{v}}$$

Démonstration en classe.

Remarque : cette propriété signifie que si l'on note M un point du plan d'affixe z , si l'on note M' l'image de M par la translation $t_{\vec{v}}$ et enfin si l'on note z' l'affixe de M' , alors on a la relation $z' = z + z_{\vec{v}}$.

En termes plus explicites, " $z + z_{\vec{v}}$ est la formule" qui permet de calculer l'affixe de l'image du point $M(z)$.

Rotation :

PROPRIÉTÉ 2 — Soit Ω un point du plan d'affixe ω , et soit k un réel non-nul. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est :

$$z' = \omega + k(z - \omega)$$

Démonstration en classe.

PROPRIÉTÉ 3 — Soit Ω un point du plan d'affixe ω , et soit θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle θ est :

$$z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

Démonstration en classe.

PROPRIÉTÉ 4 — L'écriture complexe de la symétrie par rapport à l'axe réel est :

$$z' = \bar{z}$$

Nous n'étudierons pas l'écriture complexe d'une réflexion par rapport à une droite Δ quelconque.

Homothétie :

Exercice 1

Soit I le point d'affixe $2i$ et f la fonction qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = iz$.

1) a) Déterminer l'affixe du point A' , l'image par f du point A d'affixe $1 + \sqrt{2} + i$.

b) Montrer que A , I et A' sont alignés.

2) a) Montrer que les points M du plan tels que M , I et M' soient alignés sont sur le cercle Γ de centre Ω d'affixe $1+i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

b) Montrer que $A \in \Gamma$.

c) Déterminer l'ensemble Γ' décrit par le point M' lorsque le point M décrit Γ .

3) Soit B le point d'affixe $2+2i$ et B' son image par f .

a) Montrer que $(AB) \perp (A'B')$

b) Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_A}$ puis en déduire la nature du quadrilatère $OACA'$.

Ex 2 : Soit les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et f la fonction qui à tout point M (différent de A) d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \bar{z} \frac{z-2}{\bar{z}-2}$.

1) a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1+i$.

b) Montrer que $(AP) \parallel (BP')$.

c) Montrer que $(AP) \perp (PP')$.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

On cherche maintenant à généraliser les propriétés 1b) et 1c) pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3) a) Montrer que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2} \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $(AM) \parallel (BM')$.

4) Soit M un point quelconque tel que $M \notin (AB)$. Généraliser le résultat de 1c)

5) Soit M un point distinct de A. Dédurre des questions précédentes une construction du point M' image de M par f .

Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2i$.

II. Le groupe \mathbb{U}

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition : Soit n un entier naturel non nul.

On appelle racine n -ième de l'unité, tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

1 est bien sûr toujours une racine n -ième de l'unité

Remarques :

Les racines n -ième de l'unité sont les racines du polynôme $P(z) = z^n - 1$.

On dit que \mathbb{U} est un groupe car ses éléments sont stables par produit et par quotient :

Soient z_1 et z_2 deux racines n -ième de l'unité alors $z_1^n = 1$ et $z_2^n = 1$

Donc $(z_1 \times z_2)^n = z_1^n \times z_2^n = 1$ et $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = 1$

Exercice :

Somme des racines 7-ièmes de l'unité

1) Soit ω une racine 7-ième de l'unité tel que $\omega \neq 1$.
Montrer que ω^k est aussi une racine 7-ième de l'unité
pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$

On admet la réciproque, ce qui signifie que l'ensemble \mathbb{U}_7 est constitué des complexes ω^k avec $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$ où ω est un élément quelconque de \mathbb{U}_7 .

2) Justifier que la somme des éléments de \mathbb{U}_7 est nulle.

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = 1$ admet exactement n racines n -ièmes de l'unité distinctes.

Il s'agit des nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité \mathbb{U} .

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.

Les points images des éléments de \mathbb{U}_n appartiennent au cercle trigonométrique.

Pour $n \geq 3$, les points images des éléments de \mathbb{U}_n sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

Représentation de quelques cas particuliers :

- Les racines 2-ièmes (ou racines carrées) de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^2 = 1$.

Dans ce cas on trouve facilement -1 et 1 . On a $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$

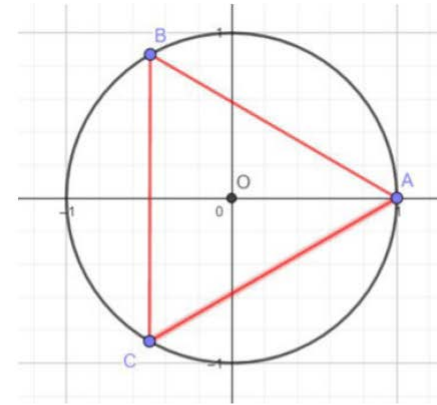
- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^3 = 1$.

Les solutions sont les nombres complexes :

$$e^{2i \times 0 \times \frac{\pi}{3}} = e^0 = 1, e^{2i \times 1 \times \frac{\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \text{ et } e^{2i \times 2 \times \frac{\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

On note : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a alors $j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Ainsi $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$

Les points images des éléments de \mathbb{U}_3 sont les sommets du triangle équilatéral ABC.



- Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^4 = 1$.

Dans ce cas on peut factoriser facilement pour déterminer les racines de l'unité :

$$\begin{aligned} z^4 = 1 &\Leftrightarrow z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0 \end{aligned}$$

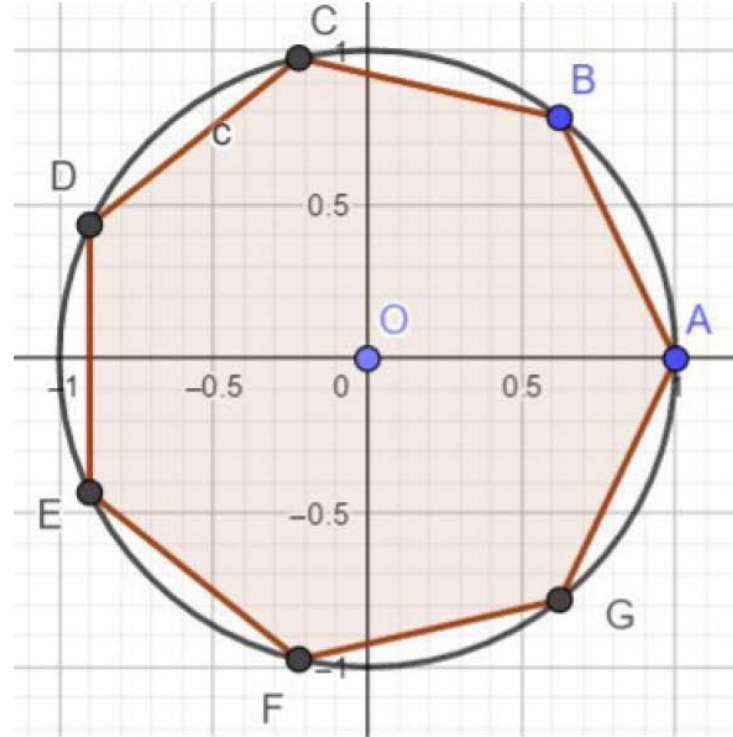
Ainsi $\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$

Les points images des éléments de \mathbb{U}_4 sont les sommets d'un carré ABCD.

Exemple :

Soit l'heptagone régulier ABCDEFG

Donner l'affixe de chacun de ses sommets sous forme exponentielle.



Exercice : Résoudre dans \mathbb{C} les équations ci-dessous, puis tracer le polygone dont les sommets ont pour affixes ces solutions.

1) $z^8 = 1$

2) $z^{12} = 1$

Résoudre une équation complexe avec les racines de l'unité

On utilise la technique du **changement de variables** pour se ramener à une équation du type $Z^n = 1$.

Exemple : Résoudre $z^5 = 4\sqrt{2}$

On remarque que $4\sqrt{2} = (\sqrt{2})^5$

Donc $z^5 = \sqrt{2}^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^5 = 1$

On pose $Z = \frac{z}{\sqrt{2}}$, ainsi $Z = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ où $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Comme $z = \sqrt{2}Z$ alors $z = \sqrt{2}e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ où $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Exercice : Résoudre dans \mathbb{C} les équations ci-dessous.

$$1) (z - i)^4 = 1$$

$$2) z^6 = (2 - i)^6$$

D'autres exemples :

Ex 1 : Utiliser les racines n -ièmes de l'unité pour résoudre une équation

On considère dans \mathbb{C} l'équation $z^4 - 28 + 96i = 0(E)$.

- 1) Montrer que $z_0 = 3 - i$ est une solution de (E)
- 2) En déduire que l'équation (E) est équivalente à l'équation $z^4 = z_0$
- 3) Résoudre (E).

Ex 2 : Utiliser les racines n -ièmes de l'unité pour résoudre une équation

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$.
- 2) Soit z un nombre complexe . On pose $z = \frac{u-1}{u+1}$ (avec $u \neq -1$) .

Exprimer u en fonction de z .

- 3) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(u - 1)^4 = (u + 1)^4$.

Un problème de construction

On souhaite construire à la règle non graduée et au compas le pentagone régulier ci-contre.

1) On considère les points $K(-1)$ et $J\left(\frac{i}{2}\right)$.

Le cercle de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[KJ]$ en L .

Calculer les longueurs KJ et KL .

2) Donner sous forme exponentielle l'affixe de C .

3) Montrer que $KC^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$



$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

4) La calculatrice affiche :

En utilisant les résultats de la calculatrice, montrer que $KC=KL$

5) Dans le plan complexe, construire à la règle non graduée et au compas un pentagone régulier.

