Résolution des équations de degré 3 par la méthode de "Cardan"

Introduction: D'un point de vue historique, le nom de cette méthode semble usurpé puisque le mathématicien français du XVIème siècle Cardan qui l'a publiée la tenait d'un mathématicien italien Tartaglia (qui lui avait d'ailleurs fait promettre de ne pas la publier), et que d'autre part un autre mathématicien italien Scipione del Ferro semble l'avoir découverte avant eux. Mais les mathématiciens français aiment donner des noms français aux formules ou méthodes célèbres.

But: On cherche les racines d'un polynôme de degré trois

$$P = X^3 + bX^2 + cX + d.$$

1) On va d'abord se débarrasser du coefficient b. Montrer qu'en posant $Y = X - \alpha$ et en choisissant bien α, on peut se ramener à chercher les racines d'un polynôme Q de la forme

$$Q = Y^3 + pY + q\,.$$

Donner les valeurs de α, p, q en fonction de (b, c, d).

On va chercher les racines complexes de Q, sous la forme $Y = u + v$, avec u, v complexes.

2) On suppose que z est une racine de Q, donc que $z^3 + pz + q = 0$. On pose $z = u + v$. Écrire l'équation vérifiée par u et v.

3) On fait l'hypothèse supplémentaire $3uv + p = 0$. Montrer que l'équation précédente devient alors $u^3 + v^3 + q = 0$

4) On connaît donc la somme de u^3 et v^3 ($= -q$) ainsi que leur produit ($= -p^3/27$). Pourquoi peut-on en déduire que u^3 et v^3 sont les deux racines du polynôme

$$R = X^2 + qX - \frac{p^3}{27}\ ?$$

5) En déduire les valeurs de u^3 et v^3 suivant les différentes valeurs de Δ, le discriminant de R.

(Il y a normalement deux couples possibles puisqu'on peut permuter u^3 et v^3 mais cela n'aura pas d'importance pour la suite donc choisissez un ordre arbitraire).

6) Montrer qu'on peut alors en déduire les trois valeurs possibles pour u: $u_0, u_0 j, u_0 j^2$. Montrer qu'une fois la valeur de u choisie parmi ces trois possibilités, v doit prendre une unique valeur. On note v_0 la valeur associée à u_0. Exprimez les valeurs de v associée à $u_0 j$ et $u_0 j^2$ en fonction de v_0 et de j.

7) En déduire que les solutions possibles pour Y sont:

$$u_0 + v_0, \quad u_0 j + v_0 j^2\,, \quad u_0 j^2 + v_0 j$$

8) Que vaut $1 + j + j^2$? Développer $(Y - u_0 - v_0)(Y - u_0 j - v_0 j^2)(Y - u_0 j^2 - v_0 j)$ et en déduire que c'est bien la factorisation dans $\mathbb{C}$ de $Y^3 + pY + q = 0$.

9) **Application:** Essayer cette méthode avec les équations

$$\begin{aligned}
x^3+x^2+x+1 &= 0 \quad \textit{Utiliser } (\sqrt{3}-1)^3=-10+6\sqrt{3} \textit{ et } (-\sqrt{3}-1)^3=\dots \\
x^3-30x-36 &= 0 \quad \textit{Utiliser } (3+i)^3=18+26i \textit{ et l'égalité conjuguée} \\
x^3-18x+35 &= 0
\end{aligned}$$

Un peu d'histoire : En 1540, on gagnait un banquet pour la résolution d'une seule équation du troisième degré. Tartaglia, grâce à sa méthode, en a gagné trente d'un coup. (Malheureusement la coutume des banquets s'est perdue et il ne faut plus compter sur vos professeurs de mathématiques pour vous offrir trois banquets si vous avez bien résolu cet exercice...) Comme de nombreux savants de l'époque, il a gardé jalousement sa découverte qui lui procurait un avantage certain pendant un moment. Mais un jour Cardan, peut-être à la fin d'un banquet, a réussi à faire le parler pour gagner sa part de festins. Et plus tard, ce dernier a rendu publique cette méthode comme sa propre invention, ce qui a beaucoup déplu au mathématicien italien.

Par ailleurs, c'est lors des tentatives pour résoudre ces équations que les nombres complexes ont été inventés. Car même pour trouver des solutions réelles, on a besoin de passer par les complexes (voir par exemple la résolution de $x^3-36x-30=0$).

A l'époque, les notations actuelles n'avaient pas encore été inventées et chaque mathématicien développait son propre système de notations, plus ou moins pratique. Par exemple, pour les égalités que nous écririons

$$\left(7+i\sqrt{15}\right)\left(7-i\sqrt{15}\right)=49-(-15)=64$$

$$\sqrt{7-\sqrt{24}}\,\sqrt{7+\sqrt{24}}=\sqrt{49-24}=5$$

Cardan notait

```
7 p : Rm 15,                    R.V. 7 m : R24
7 m : Rm 15,                    R.V. 7 p : R24
49 m : m : 15   qd est 64       R.V. 49 m : 25  qd est 5
```

où l'on reconnait donc p opur $+$, m pour $-$, R pour $\sqrt{\ }$, et $R.V.$ si la racine concerne toute la suite de l'expression. les : sont une sorte d'espace, *qd est* signifie "est égal à" et on écrit les termes à multiplier, puis le résultat les un en dessous des autres. Même si ces notations peuvent paraître compliquées, il ne faut pas oublier qu'elles représentaient un progrès car avant, les résolutions d'équations ne faisait intervenir que très peu de formalisme et s'écrivaient en toutes lettres.

10) Entre les notations actuelles et celles de Cardan, lesquelles trouvez-vous les plus pratiques? Seriez-vous capable de refaire vos calculs avec les notations de Cardan? Et en écrivant toujours vos calculs en français sans utiliser un seul symbole?